

CORRECTION

NOM - Prénom :

BCPST 12

Interrogation écrite n°5.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 5. SUJET A.

Vendredi 16 octobre 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - On pose $a = -2 + 2i$ et $b = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de a , de b puis de $\frac{a}{b}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{a}{b}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.
4. À partir de ces valeurs, peut-on en déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$? Si oui, le faire.

①. $|a| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{2 \times 2^2} = 2\sqrt{2}$
 $\frac{a}{|a|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ donc $a = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (forme trigo car $2\sqrt{2} > 0$, c'est $|a|$)

• $|b| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$
 $\frac{b}{|b|} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $b = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ (forme trigo car $2 > 0$, c'est $|b|$)

• On en déduit la forme trigonométrique de $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$\sqrt{2} > 0$: c'est le module de $\frac{a}{b}$

Ainsi : $\frac{a}{b} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

② Forme algébrique de $\frac{a}{b}$: $\frac{a}{b} = \frac{-2+2i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-2+2i)(1-i\sqrt{3})}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{-2+2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})}{4}$

Ainsi : $\frac{a}{b} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

③ On a vu au ① que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}) = \sqrt{2}\cos \frac{5\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin \frac{5\pi}{12}$
 En comparant la forme obtenue ici avec celle obtenue au ②, on obtient :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\frac{a}{b}) = \sqrt{2}\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{Im}(\frac{a}{b}) = \sqrt{2}\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

④ Pour en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$, on remarque que $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12})$ et on utilise la formule " $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ ", d'où $\sin \frac{\pi}{12} = \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Et de même : $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = \cos \frac{\pi}{12}$ (car $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$)

donc $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 2 - Linéarisation : Linéariser $\sin^3(\theta)$.

$$\begin{aligned}\sin^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{(2i)^3} \left[(e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} (e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3 \right] \\ &= \frac{1}{(2i)^3} \left[e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta} e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta} \right] \quad (\text{formule de Moivre}) \\ &= \frac{1}{(2i)^3} \left[e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right] \\ &= \frac{1}{(2i)^2} \left[\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - 3 \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right] \xrightarrow{\text{formule d'Euler}} -\frac{1}{4} (\sin(3\theta) - 3\sin(\theta))\end{aligned}$$

D'après $\boxed{\sin^3(\theta) = -\frac{1}{4} (\sin(3\theta) - 3\sin(\theta))}$

Exercice 3 - On pose $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

- Déterminer la forme trigonométrique de z^2 .
- En déduire la forme trigonométrique de z .

① $z^2 = (\sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2 = 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i^2(2 + \sqrt{2})$
↙
identité remarquable

$$= 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} - (2 + \sqrt{2}) = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

donc $|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 \times 8} = 4$

Puis $\frac{z^2}{|z^2|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ d'après, $\boxed{z^2 = \frac{4}{20} e^{-\frac{3i\pi}{4}}}$ (forme trigo de z^2 car 470)

② $z \neq 0$ donc on peut écrire $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

donc $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$ (formule de Moivre)

donc $\frac{r^2 e^{i2\theta}}{20} = \frac{4}{20} e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ (égalité de 2 complexes ss forme trigo)

On en déduit : $\begin{cases} r^2 = 4 \\ 2\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ donc $\begin{cases} r = 2 \quad (r > 0) \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$

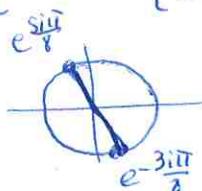
Donc $z = 2e^{-\frac{3i\pi}{8}}$ ou $z = 2e^{\frac{5i\pi}{8}}$

Il faut éliminer l'un de ces 2 complexes!

Or $\operatorname{Re}(2e^{\frac{5i\pi}{8}}) = 2\cos\frac{5\pi}{8} < 0$

(car $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{8} < \pi$), et $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{2 - \sqrt{2}} > 0$ } donc z n'est pas égal à $2e^{\frac{5i\pi}{8}}$

On en déduit $\boxed{z = 2e^{-\frac{3i\pi}{8}}}$



INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 5. SUJET B.

Vendredi 16 octobre 2026.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - On pose $a = -1 + i\sqrt{3}$ et $b = 2 + 2i$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de a , de b puis de $\frac{a}{b}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{a}{b}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.
4. À partir de ces valeurs, peut-on en déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$? Si oui, le faire.

① $|a| = 2$ et $\frac{a}{|a|} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

donc $a = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (forme trigonométrique car $2 > 0$, c'est le module de a)

$|b| = 2\sqrt{2}$ et $\frac{b}{|b|} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

donc $b = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (forme trigonométrique car $2\sqrt{2} > 0$, c'est le module de b)

On en déduit $\frac{a}{b} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Ainsi, $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ (forme trigonométrique car $\frac{1}{\sqrt{2}} > 0$)

② Forme algébrique de $\frac{a}{b}$: $\frac{a}{b} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2+2i} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(2-2i)}{2^2+2^2} = \frac{-2+2\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}+2)}{8}$

Ainsi, $\frac{a}{b} = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

③ On a vu au ① que $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \frac{5\pi}{12} + i\sin \frac{5\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos \frac{5\pi}{12} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin \frac{5\pi}{12}$

Donc $\begin{cases} \operatorname{Re}(\frac{a}{b}) = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos \frac{5\pi}{12} \\ \operatorname{Im}(\frac{a}{b}) = \frac{\sqrt{3}+1}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin \frac{5\pi}{12} \end{cases}$, d'où

$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
 $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

④ On utilise les formules " $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$ "

$\cos \frac{5\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = \sin \frac{\pi}{12}$ donc $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = \cos \frac{\pi}{12}$ donc $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 2 - Linéarisation : Linéariser $\sin^3(\alpha)$.

voir sujet A.

Exercice 3 - On pose $z = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de z^2 .
2. En déduire la forme trigonométrique de z .

$$\textcircled{1} z^2 = (2 - \sqrt{2} + 2i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}) - (2 + \sqrt{2})$$

$$= -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} \quad (\text{forme algébrique})$$

$$\text{d'où } |z^2| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Puis } \frac{z^2}{|z^2|} = \frac{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\frac{3i\pi}{4}} \quad \text{Ainsi, } \boxed{z^2 = 4e^{\frac{3i\pi}{4}}} \quad (\text{forme trigo car } 4 > 0)$$

$\textcircled{2}$ $z \neq 0$ donc on peut le chercher sous forme trigonométrique.

On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^2 = r^2 e^{2i\theta} \quad (\text{formule de Moivre : } (e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta})$$

$$\text{Ainsi } \frac{r^2}{4} e^{2i\theta} = \frac{1}{4} e^{\frac{3i\pi}{4}} \quad (\text{égalité de 2 complexes sous forme trigo})$$

$$\text{On en déduit } \begin{cases} r^2 = 4 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : 2\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{d'où : } \begin{cases} r = 2 \quad (\text{car } r > 0) \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, il y a 2 valeurs de } z \text{ possibles : } z = 2e^{\frac{3i\pi}{8}} \text{ ou } z = 2e^{\frac{11i\pi}{8}}$$

Il faut éliminer une de ces valeurs

On regarde par exemple $\text{Re}(z)$ qui est < 0

$$\text{Or } \text{Re}(2e^{\frac{3i\pi}{8}}) = 2 \cos \frac{3\pi}{8} > 0 \quad \text{car } 0 < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ } \left\{ \begin{array}{l} \text{Re}(z) < 0 \end{array} \right.$$

donc z ne peut pas être égal à $2e^{\frac{3i\pi}{8}}$.

On en déduit, par élimination :

$$\boxed{z = 2e^{\frac{11i\pi}{8}}}$$

