

Devoir Surveillé n°1

Samedi 19 septembre 2026

– Nombres réels, trigonométrie, récurrences –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter.
Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 : Calculs

1. Résoudre $|2x+1| \leqslant 3$.
2. Simplifier : $\dfrac{8!}{5! \times 3!}$
   Rappel : pour tout entier $n \geqslant 1$, la notation $n!$ se lit "factorielle n" et désigne le produit des entiers consécutifs entre 1 et n. Par exemple, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$.
3. Simplifier en rendant le dénominateur rationnel (pas de racine carrée) : $\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3}$.
4. Résoudre : $\cos^2(x) = \dfrac{3}{4}$
5. Résoudre : $2\sin^2(x) + \sqrt{3}\sin(x) - 3 = 0$
6. Soit $f : x \mapsto \cos(4x)$. Montrer que f est périodique et en donner une période (la plus pertinente possible).
   Même question pour la fonction $g : x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$
7. Montrer **par récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 - n$ est pair.

Exercice 2 : Suites et équations de Pell-Fermat

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est un entier strictement positif.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang $n = 1$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$.

4. On définit à présent la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n \end{cases}$$

On peut montrer (et on l'admettra dans la suite de cet exercice) que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs entières positives. Quel type de démonstration permet d'obtenir ce résultat ? Donner la propriété à démontrer (ne pas faire la démonstration).

5. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 - 2v_n^2 = 4(-1)^n$
7. En déduire que l'équation $x^2 - 2y^2 = 4$ admet une infinité de couples (x, y) de solutions entières.
Une telle équation est un cas particulier d'une famille d'équations appelées "équations de Pell-Fermat" : ce sont les équations d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, du type $x^2 - ny^2 = m$, où n et m sont deux entiers naturels, n n'étant pas un carré parfait.

Exercice 3 : Trigonométrie et équation du troisième degré

Rappel (formules de trigonométrie) : pour tous réels a et b,

- $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$,
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$. On pourra commencer par exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos^2\theta$ (en utilisant certaines des formules rappelées plus haut).

   (b) Justifier que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) > 0$.

   (c) Montrer que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
   On pourra appliquer le résultat de la question 1a pour une valeur de θ bien choisie.

   (d) En déduire les valeurs de $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Montrer que $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.
3. On veut résoudre l'équation :

$$\text{(E)}:\ 8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0.$$

On admet que cette équation admet au plus trois solutions.

   (a) Rechercher les solutions de cette équation sur $[-1, 1]$, en posant $x = \cos(\theta)$. On exprimera les solutions sous forme de cosinus.

   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.