

Corrigé du devoir surveillé n° 1

— 19 septembre 2026—

Exercice 1

1. $$\begin{aligned} |2x+1| \leqslant 3 &\iff -3 \leqslant 2x+1 \leqslant 3 \\ &\iff -4 \leqslant 2x \leqslant 2 \\ &\iff -2 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions est $[-2,1]$.

2. $8! = 8\times 7\times 6\times 5!$, donc $\dfrac{8!}{5!\times 3!} = \dfrac{8\times 7\times 6}{6} = 8\times 7 = 56$. Donc $\dfrac{8!}{5!\times 3!} = 56$

3. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = 3-2\sqrt{2}$. Ainsi, $\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3} = 3-2\sqrt{2}$.

4. $$\begin{aligned} \cos^2(x) = \frac{3}{4} &\iff \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \cos(x) = \cos(\tfrac{\pi}{6}) \text{ ou } \cos(x) = \cos(\tfrac{5\pi}{6}) \\ &\iff x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ -\frac{5\pi}{6}+2k\pi \right\}$.

5. On note (E) cette équation et on pose $X = \sin(x)$.
   Donc $(E) \iff 2X^2 + \sqrt{3}X - 3 = 0$. On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = 27 > 0$.
   Elle a donc deux racines réelles : $\dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{27}}{4}$ et $\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{27}}{4}$.
   Or $\sqrt{27} = \sqrt{3^2\times 3} = 3\sqrt{3}$, donc les deux racines sont $-\sqrt{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} (E) &\iff X = -\sqrt{3} \text{ ou } X = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \underbrace{\sin(x) = -\sqrt{3}}_{\text{pas de solution car } -\sqrt{3}<-1} \text{ ou } \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \sin(x) = \sin(\tfrac{\pi}{3}) \\ &\iff x = \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi \right\}$.

6. f est définie sur $\mathbb{R}$. On cherche un réel $T>0$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.
   Or $f(x+T) = \cos(4(x+T)) = \cos(4x+4T)$.
   Puisque la fonction cosinus est 2π-périodique, si $4T = 2\pi$, alors on a $f(x+T) = f(x)$.
   On en déduit que f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.
   g est définie sur $\mathbb{R}$. On cherche un réel $U>0$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x+U) = g(x)$.
   Or $g(x+T) = \sin(\dfrac{(x+U)}{2}) = \sin(\frac{x}{2}+\frac{U}{2})$.
   Puisque la fonction sinus est 2π-périodique, si $\frac{U}{2} = 2\pi$, alors on a $g(x+U) = g(x)$.
   On en déduit que g est périodique de période 4π.

7. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence $P(n)$: "n^2-n est pair".

   I Pour $n=0$: 0^2-0 est pair donc $P(0)$ est vraie.

$\underline{H}$ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
$(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - (n+1) = n^2 + n = n^2 - n + 2n$.
Or, $n^2 - n$ est pair par hypothèse et $2n$ est pair. Donc, $(n+1)^2 - (n+1)$ est pair.
Donc, $\underline{P(n+1) \text{ est vraie}}$.

$\underline{C}$ Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 - n \text{ est pair.}}$

Exercice 2

1. On commence par définir la propriété de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n)$: « $u_n \in \mathbb{N}^*$ ».

Initialisation Pour $n = 0$ et $n = 1$.
$u_0 = 2$ et $u_1 = 2$ donc $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ soient vraies.
$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$. Or, une somme de deux entiers strictement positifs est un entier strictement positif.
Donc, $H(n+2)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En décalant d'un les indices dans la définition de la suite, on obtient $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$.
Donc, $u_{n+1} - u_n = u_n + u_{n-1}$.
Or, tous les termes de la suite sont strictement positifs donc $u_n + u_{n-1} > 0$.
Donc, $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc, la suite est croissante à partir de $n = 1$.

3. On commence par définir la propriété de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n)$: « $u_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ ».

Initialisation Pour $n = 0$ et $n = 1$.
$u_0 = 2$ et $(1+\sqrt{2})^0 + (1-\sqrt{2})^0 = 1 + 1 = 2$ donc $H(0)$ est vraie.
$u_1 = 2$ et $(1+\sqrt{2})^1 + (1-\sqrt{2})^1 = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$ donc $H(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ soient vraies.
Montrons que $H(n+2)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + u_n \\ &= 2\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right) + (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \\ &= (1+\sqrt{2})^n(2 + 2\sqrt{2} + 1) + (1-\sqrt{2})^n(2 - 2\sqrt{2} + 1) \\ &= (1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^2 \\ &= (1+\sqrt{2})^{n+2} + (1-\sqrt{2})^{n+2} \end{aligned}$$

Donc, $H(n+2)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$.

4. On mène un raisonnement par récurrence comme à la question 1 avec comme propriété de récurrence « $u_n \in \mathbb{N}$ ».

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence : $H(n)$: « $v_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$ ».

Initialisation Pour $n = 0$ et $n = 1$.
$v_0 = 0$ et $\dfrac{(1+\sqrt{2})^0 - (1-\sqrt{2})^0}{\sqrt{2}} = \dfrac{1-1}{\sqrt{2}} = 0$ donc $H(0)$ est vraie.
$v_1 = 2$ et $\dfrac{(1+\sqrt{2})^1 - (1-\sqrt{2})^1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ donc $H(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ soient vraies.
Montrons que $H(n+2)$ est vraie.

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= 2v_{n+1} + v_n \\ &= 2\left(\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\left((1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}\right) + (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n(2(1+\sqrt{2}) + 1) - (1-\sqrt{2})^n(2(1-\sqrt{2}) + 1)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^2\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{n+2} - (1-\sqrt{2})^{n+2}\right] \end{aligned}$$

Donc, $H(n+2)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n^2 - 2v_n^2 = (u_n - \sqrt{2}v_n)(u_n + \sqrt{2}v_n)$.
On va calculer les deux termes du produits.

$$\begin{aligned} u_n - \sqrt{2}v_n &= (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n - \sqrt{2}\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} \\ &= (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n - (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \\ &= 2(1-\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n + \sqrt{2}v_n &= (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n + \sqrt{2}\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} \\ &= (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \\ &= 2(1+\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} u_n^2 - 2v_n^2 &= 2(1-\sqrt{2})^n.2(1+\sqrt{2})^n \\ &= 4((1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}))^n \\ &= 4(1-2)^n \\ &= 4(-1)^n \end{aligned}$$

7. Pour tout entier n pair, le couple (u_n, v_n) est un couple d'entiers solution de $x^2 - 2y^2 = 4$.
Puisque la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang $n = 1$, les u_n sont deux à deux distincts quand n parcours $\mathbb{N}^*$. Donc les couples (u_n, v_n) sont deux à deux distincts. Ainsi, cette équation a une infinité de solutions.

Exercice 3

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, donc, en utilisant la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$: $\boxed{\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}.}$

   (b) $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$. Puisque la fonction cosinus est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que $\boxed{\cos\frac{\pi}{8} > 0 \text{ et } \cos\frac{3\pi}{8} > 0}$.

   (c) On sait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'après la question précédente, $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2}$.
   Ainsi, $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$. Il y a donc deux candidats possibles pour la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \qquad \text{ou} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}.$$

   Pour choisir la bonne valeur, il suffit d'utiliser la question précédente : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.}$
   Pour la seconde inégalité, on raisonne de même sachant que $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0$. On trouve $\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$

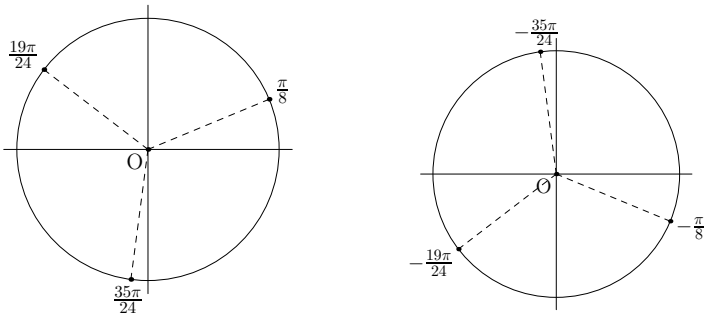
   (d) On sait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. Appliqué en $\frac{\pi}{8}$ et en $\frac{3\pi}{8}$, on trouve $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Ainsi, $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.}$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On écrit $\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta)$ et on utilise une formule de trigonométrie. On exprime ensuite $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ à l'aide des formules de trigonométrie correspondantes. On obtient bien l'égalité recherchée : $\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).}$

3. (a) On travaille sur l'intervalle $[-1,1]$. Tous les nombres de cet intervalle peuvent s'écrire sous la forme d'un cosinus. Donc, $x \in [-1,1]$ est solution de $8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0$ si, et seulement si, en écrivant $x = \cos(\theta)$, on a $8\cos^3\theta - 6\cos(\theta) - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0$.

$$\begin{aligned}
8\cos^3\theta - 6\cos(\theta) - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0 &\iff 2\left(4\cos^2\theta - 3\cos(\theta)\right) - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0 \\
&\iff 2\cos(3\theta) = \sqrt{2-\sqrt{2}} \iff \cos(3\theta) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\
&\iff \cos(3\theta) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\
&\iff 3\theta \equiv \frac{3\pi}{8}\ [2\pi] \text{ ou } 3\theta \equiv -\frac{3\pi}{8}\ [2\pi] \\
&\iff \theta \equiv \frac{\pi}{8}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } \theta \equiv -\frac{\pi}{8}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right].
\end{aligned}$$

On représente alors les valeurs possibles pour θ sur le cercle trigonométrique :



Ainsi, on peut affirmer que

$$\begin{aligned}
&x \in [-1,1] \text{ est solution de } 8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0 \\
\iff\ &x = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{19\pi}{24}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{35\pi}{24}\right).
\end{aligned}$$

Remarque. Comme le cosinus est une fonction paire, il n'est pas nécessaire de considérer les autres angles. Ainsi, sur $[-1,1]$, l'ensemble de solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_{[-1,1]} = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{19\pi}{24}\right), \cos\left(\frac{35\pi}{24}\right)\right\}.}$$

(b) On a admis que l'équation possède au plus trois solutions. Dans la question précédente, on a trouvé trois expressions pour les solutions. Avant de conclure, il faut s'assurer que ces trois expressions sont bien différentes les unes des autres.
On a $\cos\left(\frac{35\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{24}\right)$. Par ailleurs, on sait que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Comme $0 < \frac{3\pi}{24} < \frac{13}{24} < \frac{19\pi}{24} < \pi$, on en déduit que $\cos\left(\frac{3\pi}{24}\right) > \cos\left(\frac{13}{24}\right) > \cos\left(\frac{19\pi}{24}\right)$.
Les trois valeurs trouvées auparavant sont donc bien distinctes deux à deux, on connait donc les trois solutions de l'équation.
Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{19\pi}{24}\right), \cos\left(\frac{35\pi}{24}\right)\right\}}$.
À l'aide des calculs précédents et des formules de trigonométrie, on peut montrer que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4},\ \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right\}.}$$