CORRECTION

NOM - Prénom :

BCPST 12
Interrogation écrite n^o5.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 5. SUJET A.

Vendredi 16 octobre 2026.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - On pose $a = -2 + 2i$ et $b = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de a, de b puis de $\frac{a}{b}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{a}{b}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.
4. À partir de ces valeurs, peut-on en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$? Si oui, le faire.

① • $|a| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{2\times 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\frac{a}{|a|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\frac{3i\pi}{4}}$ donc $\boxed{a = 2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}}$ (forme trigo car $2\sqrt{2} > 0$, c'est $|a|$)

• $|b| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

$\frac{b}{|b|} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\boxed{b = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$ (forme trigo car $2 > 0$, c'est $|b|$)

• On en déduit la forme trigonométrique de $\frac{a}{b}$:

$\frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = \underbrace{\sqrt{2}}_{>0 : \text{c'est le module de } \frac{a}{b}} e^{\frac{5i\pi}{12}}$

Ainsi : $\boxed{\frac{a}{b} = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}}$

② Forme algébrique de $\frac{a}{b}$: $\frac{a}{b} = \frac{-2+2i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-2+2i)(1-i\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{-2+2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})}{4}$

Ainsi : $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

③ On a vu au ① que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}$

En comparant la forme obtenue ici avec celle obtenue au ②, on obtient :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{Im}\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

④ Pour en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$, on remarque que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$ et on utilise la formule "$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$", d'où $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

Et de-même : $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$, (car $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$)

donc $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

Exercice 2 - Linéarisation : Linéariser $\sin^3(\theta)$.

$\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}\left[(e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\right]$

$= \frac{1}{(2i)^3}\left[e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}\right]$ (formule de Moivre)

$= \frac{1}{(2i)^3}\left[e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\right]$

$= \frac{1}{(2i)^2}\left[\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - 3\,\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right] = -\frac{1}{4}(\sin(3\theta) - 3\sin\theta)$

→ formule d'Euler.

D'où $\boxed{\sin^3(\theta) = -\frac{1}{4}(\sin(3\theta) - 3\sin\theta)}$

Exercice 3 - On pose $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de z^2.
2. En déduire la forme trigonométrique de z.

① $z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 = 2-\sqrt{2} - 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} + i^2(2+\sqrt{2})$

→ identité remarquable

$= 2-\sqrt{2} - 2i\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} - (2+\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

donc $|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2\times 8} = 4$

Puis $\frac{z^2}{|z^2|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$. Ainsi, $\boxed{z^2 = \underbrace{4}_{>0} e^{-\frac{3i\pi}{4}}}$ (forme trigo de z^2 avec $4>0$)

② $z \neq 0$ donc on peut écrire $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

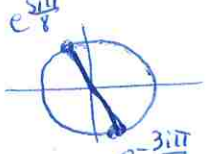
donc $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$ (formule de Moivre)

donc $\underbrace{r^2}_{>0} e^{i2\theta} = \underbrace{4}_{>0} e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ (égalité de 2 complexes ss forme trigo)

On en déduit : $\begin{cases} r^2 = 4 \\ 2\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ donc $\begin{cases} r = 2 \ (r>0) \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$

Donc $z = 2e^{-\frac{3i\pi}{8}}$ ou $z = 2e^{\frac{5i\pi}{8}}$

Il faut éliminer l'un de ces 2 complexes !



Or $\mathrm{Re}\left(2e^{\frac{5i\pi}{8}}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{8} < 0$ (car $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{8} < \pi$), et $\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2-\sqrt{2}} > 0$ } donc z n'est pas égal à $2e^{\frac{5i\pi}{8}}$

On en déduit $\boxed{z = 2e^{-\frac{3i\pi}{8}}}$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 5. SUJET B.

Vendredi 16 octobre 2026.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - On pose $a = -1 + i\sqrt{3}$ et $b = 2 + 2i$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de a, de b puis de $\frac{a}{b}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{a}{b}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.
4. À partir de ces valeurs, peut-on en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$? Si oui, le faire.

① $|a| = 2$ et $\frac{a}{|a|} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

donc $\boxed{a = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}}$ (forme trigonométrique car $2>0$, c'est le module de a)

$|b| = 2\sqrt{2}$ et $\frac{b}{|b|} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\frac{i\pi}{4}}$

donc $\boxed{b = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}$ (forme trigonométrique car $2\sqrt{2}>0$, c'est le module de b)

On en déduit $\frac{a}{b} = \frac{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5i\pi}{12}}$

Ainsi, $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5i\pi}{12}}}$ (forme trigonométrique car $\frac{1}{\sqrt{2}}>0$)

② Forme algébrique de $\frac{a}{b}$: $\frac{a}{b} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2+2i} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(2-2i)}{2^2+2^2} = \frac{-2+2\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}+2)}{8}$

Ainsi, $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}}$

③ On a vu au ① que $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5i\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{5\pi}{12} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{5\pi}{12}$

donc $\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{5\pi}{12} \\ \mathrm{Im}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{5\pi}{12} \end{cases}$, d'où $\boxed{\begin{array}{l} \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{array}}$

④ On utilise les formules " $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ "

$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12}$ donc $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$ donc $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

Exercice 2 - Linéarisation : Linéariser $\sin^3(\alpha)$.

voir sujet A.

Exercice 3 - On pose $z = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de z^2.
2. En déduire la forme trigonométrique de z.

① $z^2 = 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} - (2+\sqrt{2})$

$= -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2} = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ (forme algébrique)

donc $|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2\times 8} = \sqrt{16} = 4$

Puis $\frac{z^2}{|z^2|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$. Ainsi, $z^2 = 4e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ (forme trigo car $4>0$)

② $z \neq 0$ donc on peut le chercher sous forme trigonométrique.

On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ (formule de Moivre : $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$)

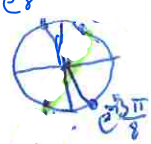
Ainsi $\underbrace{r^2}_{>0} e^{2i\theta} = \underbrace{4}_{>0} e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ (égalité de 2 complexes sous forme trigo)

On en déduit $\begin{cases} r^2 = 4 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : 2\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} r = 2 \ (\text{car } r>0) \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$

Ainsi, il y a 2 valeurs de z possibles : $z = 2e^{-\frac{3i\pi}{8}}$ ou $z = 2e^{i\frac{5\pi}{8}}$

Il faut éliminer une de ces valeurs

On regarde par exemple $\mathrm{Re}(z)$ qui est <0



Or $\begin{cases} \mathrm{Re}\left(2e^{-\frac{3i\pi}{8}}\right) = 2\cos\frac{3\pi}{8} > 0 \ \text{car } -\frac{\pi}{2} < -\frac{3\pi}{8} < 0 \\ \mathrm{Re}(z) < 0 \end{cases}$

donc z ne peut pas être égal à $2e^{-\frac{3i\pi}{8}}$.

On en déduit, par élimination : $z = 2e^{i\frac{5\pi}{8}}$