

Logique, raisonnements et ensembles
Logique élémentaire
Exercice 1

1. Rappeler les lois de Morgan pour les connecteurs logiques et les démontrer.
2. Rappeler les règles de distributivité des connecteurs logiques et les démontrer.

Exercice 2

Déterminer la négation, la réciproque et la contraposée de :

1. Il fait beau donc il ne pleut pas.
2. J'ai bien dormi donc je suis en forme.
3. J'ai bien révisé donc je connais mon cours.

Raisonnements
Exercice 3

Démontrer qu'un entier est pair si et seulement si son carré est pair.

Exercice 4

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)$ est pair.

Exercice 5

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x + \sqrt{2x+1} = 1$.

Exercice 6

Pour cet exercice, on admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Soient a et b des nombres rationnels.
Démontrer que, si $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$.
2. Soit x un réel.
Démontrer que, si on peut écrire x sous la forme $x = a + b\sqrt{2}$ avec a et b des rationnels, alors cette écriture est unique.

Exercice 7

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

Démontrer que f peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire toutes deux définies sur \mathbb{R} .

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$$

Démontrer que la suite (u_n) est constante égale à 1.

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + u_0 + \dots + u_n \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Etudier la parité de u_n .

Quantificateurs
Exercice 12

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Ecrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

1. f est strictement croissante.
2. f n'est pas strictement croissante.
3. f est strictement décroissante.
4. f ne s'annule pas.
5. f s'annule.
6. f est nulle.
7. f s'annule une unique fois.

Exercice 13

Ecrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes en précisant lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses.

1. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
2. Il existe un entier multiple de tous les autres.
3. Tout réel possède une racine carrée dans \mathbb{R} .
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

Ensembles

Exercice 14

Soient A et B définis par :

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$$

$$B = \{ (\lambda, \lambda, -2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

1. Montrer que $B \subset A$.
2. A-t-on $A = B$?

Exercice 15

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .
Démontrer que, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.

Exercice 16

Soient A , B et C trois ensembles.
Démontrer que : $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

Exercice 17

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .
On définit la différence symétrique de A et B par :
 $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

1. Expliquer ce que représente la différence symétrique.
2. Donner $E \Delta \emptyset$, $A \Delta E$ et $E \Delta E$.
3. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.

Python

Exercice 18

1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et qui renvoie **True** si x appartient à $[0, 20]$ et **False** sinon.
2. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et qui renvoie **True** si x n'appartient pas à $[0, 20]$ et **False** sinon.

Exercice 19

Ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et qui renvoie **True** si x est multiple de 5 mais pas de 10 et **False** sinon.

Exercice 20

Ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et qui renvoie **True** si x est un multiple de 2 ou un multiple de 3 et **False** sinon.