Logique, raisonnements et ensembles

Logique élémentaire

Exercice 1 (Correction rapide)

1. L'énoncé est dans le cours, et commence par "Soient P et Q deux assertions", puisqu'il faut penser à définir les objets qu'on utilise.
   La preuve repose sur une table de vérité, qui comporte 4 lignes.
2. L'énoncé est dans le cours, et commence par "Soient P, Q et R deux assertions", puisqu'il faut penser à définir les objets qu'on utilise.
   La preuve repose sur une table de vérité, qui comporte 8 lignes pour couvrir toutes les situations.

Exercice 2 (Correction complète)

Toutes ces phrases sont des implications, de la forme $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$. Dans chaque cas :

- La négation est P et $\overline{\mathsf{Q}}$.
  ATTENTION ! La négation d'une implication revient à dire qu'il existe un contre-exemple.
- La réciproque $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathsf{P}$.
- La contraposée est $\overline{\mathsf{Q}} \Rightarrow \overline{\mathsf{P}}$.

1. Phrase de départ : Il fait beau donc il ne pleut pas.
   - Négation : Il fait beau et il pleut.
   - Réciproque : Il ne pleut pas donc il fait beau.
   - Contraposée : Il pleut donc il ne fait pas beau.
2. Phrase de départ : J'ai bien dormi donc je suis en forme.
   - Négation : J'ai bien dormi et je ne suis pas en forme.
   - Réciproque : Je suis en forme donc j'ai bien dormi.
   - Je ne suis pas en forme donc je n'ai pas bien dormi.
3. Phrase de départ : J'ai bien révisé donc je connais mon cours.
   - Négation : J'ai bien révisée et je ne connais pas mon cours.
   - Réciproque : Je connais mon cours donc j'ai bien révisé.
   - Je ne connais pas mon cours donc je n'ai pas bien révisé.

Raisonnements

Exercice 3 (Correction détaillée - Méthode 1 : par double implication)

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Il faut démontrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair. On procède par double implication.

- Sens direct : on suppose que n est pair.
  Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $n = 2k$.
  Ainsi, $n^2 = (2k)^2 = 2\,(2k^2)$, ce qui prouve que n^2 est lui aussi pair.
- Sens réciproque
  Pour ce sens, on raisonne par contraposée : on va démontrer que, si n est impair, alors n^2 est impair.
  On suppose que n est impair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.
  Ainsi, $n^2 = (2k+1)^2 = 2\,(2k^2 + 2k) + 1$, ce qui prouve que n^2 est impair.
- Conclusion
  $\boxed{\text{Un entier est pair si et seulement si son carré est pair.}}$

Exercice 3 (Correction détaillée - Méthode 2 : par disjonction de cas)

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- 1^er^ cas : si n est pair
  Dans ce cas, on peut écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Ainsi, $n^2 = (2k)^2 = 2\,(2k^2)$, et donc n^2 est pair.
- 1^er^ cas : si n est impair
  Dans ce cas, on peut écrire $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Ainsi, $n^2 = (2k+1)^2 = 2\,(2k^2 + 2k) + 1$, et donc n^2 est impair.
- Conclusion
  Le carré d'un entier est pair dans un cas et un cas seulement, ce qui prouve que :
  $\boxed{\text{Un entier est pair si et seulement si son carré est pair.}}$

Exercice 4 (Correction détaillée)

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
On distingue les cas :

- Si n est pair
  Dans ce cas, $n + 1$ est impair.
  Or, le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair.
  Donc $n(n + 1)$ est pair.
- Si n est impair
  Dans ce cas, $n + 1$ est pair.
  Donc, comme précédemment, $n(n + 1)$ est pair.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}\,,\ n(n+1) \text{ est pair.}}$

Exercice 5 (Correction détaillée - Méthode 1 : par disjonction de cas)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Tout d'abord :
L'équation a un sens si et seulement si $2x+1 \geqslant 0$ c'est-à-dire si et seulement si $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.
On cherche en fait $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty \right[$.

On résout :
$$\begin{aligned} & x + \sqrt{2x+1} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{2x+1} = 1 - x \end{aligned}$$

On distingue alors les cas :

- Si $1 - x \geqslant 0$
  Tout d'abord, comme on a aussi $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty \right[$, cette condition revient en fait à $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 1 \right[$.
  Dans ce cas :
  $$\begin{aligned} & x + \sqrt{2x+1} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{2x+1} = 1 - x \\ \Leftrightarrow \quad & 2x+1 = (1-x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x+1 = 1 - 2x + x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x-4) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$
  Or, dans ce cas on cherche $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 1 \right[$ donc il reste seulement $x = 0$ comme solution.

- Si $1 - x > 0$
  Tout d'abord, comme on a aussi $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty \right[$, cette condition revient en fait à $x \in [1, +\infty[$.
  Dans ce cas, $\sqrt{2x+1} = 1 - x$ est en fait impossible (un membre est positif ou nul et l'autre est strictement négatif).
  Il n'y a pas de solution

Conclusion
$\boxed{\text{L'équation a une seule solution qui est } 0.}$

Exercice 5 (Correction détaillée - Méthode 2 : avec une vérification)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Tout d'abord :
L'équation a un sens si et seulement si $2x+1 \geqslant 0$ c'est-à-dire si et seulement si $x \geqslant -\frac{1}{2}$.
On cherche en fait $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[$.

On résout :

$$
\begin{aligned}
& x + \sqrt{2x+1} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{2x+1} = 1 - x \\
\Rightarrow \quad & 2x+1 = (1-x)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x+1 = 1 - 2x + x^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x(x-4) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \text{ ou } x = 4
\end{aligned}
$$

On a alors trouvé deux solutions potentielles. Vérifions si elles conviennent.

- Pour $x = 0$: quand on réinjecte dans l'équation, on constate que 0 est bien solution.
- Pour $x = 4$, on aurait $7 = 1$, qui est faux, donc 4 n'est pas vraiment solution.

Conclusion

$\boxed{\text{L'équation a une seule solution qui est 0.}}$

Remarque : on ne l'a pas rédigé exactement comme ça, mais fondamentalement on vient de raisonner par analyse synthèse.

Exercice 6 (Correction détaillée ; exercice objectivement difficile))

1. Mise en place du raisonnement
   On voit qu'il s'agit de montrer une implication, de la forme $P \Rightarrow Q$, avec P : "$a+b\sqrt{2}=0$" et Q : "$a=0$ ou $b=0$".
   On va raisonnement par l'absurde : il faudra donc supposer le contraire de $P \Rightarrow Q$. Or, le contraire d'une implication est "il existe un contre-exemple".
   Dans le contexte de cet exercice, donner un contre-exemple consiste à fournir des nombres a et b tel que $a+b\sqrt{2}=0$ et pourtant $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

   On raisonne par l'absurde.
   On suppose qu'il existe a et b des nombres rationnels tels que $a+b\sqrt{2}=0$ et $\Big(a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0\Big)$.
   - Si $b \neq 0$.
     Dans ce cas, puisque $a+b\sqrt{2}=0$, on peut écrire $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux .
   - Si $a \neq 0$.
     Dans ce cas, puisque $a+b\sqrt{2}=0$, on obtient en multipliant par $\sqrt{2}$: $a\sqrt{2}+2b=0$, d'où $\sqrt{2} = -\dfrac{2b}{a} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux.

   Dans tous les cas, on a une contradiction.
   C'est ce qu'on voulait.
2. On raisonne par l'absurde.
   On suppose qu'il existe a, b, a' et b' des nombres rationnels tels que $x = a+b\sqrt{2} = a'+b'\sqrt{2}$.
   Dans ce cas, on a : $(a-a')+(b-b')\sqrt{2}=0$, avec $a-a'$ et $b-b'$ des rationnels.
   Donc, d'après la question 1, $a-a'=0$ et $b-b'=0$, c'est-à-dire $a=a'$ et $b=b'$.
   C'est ce qu'on voulait.

Exercice 7 (Correction rapide)

On raisonne par analyse-Synthèse.

Exercice 8 (Correction détaillée)

On raisonne par récurrence pour démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

- Initialisation : pour $n=0$
  $u_0 = 1$ donc la propriété est vérifiée.
- Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1$.
  Dans ce cas, $u_{n+1} = 3u_n - 2 = 3 \times 1 - 2 = 1$.
  Donc la propriété est vraie au range $n+1$.
- Conclusion
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
  $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est constante égale à } 1.}$

Exercice 9 (Correction détaillée)

On procède par récurrence forte.

- Initialisation : pour $n = 0$
  D'un part, $u_0 = 1$.
  D'autre part, $2^0 = 1$.
  On a donc bien $u_0 = 2^0$.
- Hérédité : on suppose qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_0 = 2^0$, $u_1 = 2^1$, ..., $u_{n-1} = 2^{n-1}$ et $u_n = 2^n$.
  On calcule alors :

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
u_{n+1} & = & 1 & + & u_0 & + & u_1 & + & u_2 & + & \dots & + & u_{n-1} & + & u_n \\
& = & 1 & + & 2^0 & + & 2^1 & + & 2^2 & + & \dots & + & 2^{n-1} & + & 2^n \\
& = & 1 & + & 1 & + & 2 & + & 2^2 & + & \dots & + & 2^{n-1} & + & 2^n \\
& = & & & 2 & + & 2 & + & 2^2 & + & \dots & + & 2^{n-1} & + & 2^n \\
& = & & & & & 2^2 & + & 2^2 & + & \dots & + & 2^{n-1} & + & 2^n \\
& = & & & & & & & 2^3 & + & \dots & + & 2^{n-1} & + & 2^n \\
& = & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
& = & & & & & & & & & & & 2^n & + & 2^n \\
& = & & & & & & & & & & & & & 2^{n+1}
\end{array}$$

  La propriété est dons vraie au rang $n + 1$.
- Conclusion
  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n\ .}$

Exercice 10 (Correction rapide)

On raisonne par récurrence double.

Exercice 11 (Correction rapide)

On commence par calculer les premiers termes. On conjecture que les termes de la suite sont tous impairs.
On le démontre par récurrence double.

Quantificateurs

Exercice 12

Fait en classe.

Exercice 13 (Correction complète)

Attention : cet exercice est significativement plus difficile que le précédent.

1. Il s'agit de nier un "il existe" ; il faut donc forcément utiliser un "pour tout"
   $\forall n_1 \in \mathbb{Z}$, $\exists n_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $n_1 < n_2$
2. $\exists N \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = nk$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 = x$
4. Il s'agit de nier un "pour tout" ; il faut donc forcément utiliser un "il existe".
   $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $x \neq \dfrac{a}{b}$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x > x^2$

Et : V F F V V

Ensembles

Exercice 14 (Indications)

Sera fait en classe.

- Une première chose est de vraiment comprendre ce que sont les ensembles A et B.
  Par exemple : est-ce que $(1,1,1) \in A$? est-ce que $(1,-1) \in A$? est-ce que $(1,-1,0) \in A$? De façon générale, à quoi ressemble les éléments de A ?
  Même chose avec B.
- Que signifie $B \subset A$?
- Que faudrait-il de plus pour avoir $A = B$?

Exercice 15 (Correction rapide)

Il s'agit de démontrer une implication.
On suppose donc que $A \cap B = A \cup B$, et on veut démontrer que $A = B$.
Il s'agit maintenant de prouver une égalité d'ensembles : on procède par double inclusion.
Pour démontrer que $A \subset B$, on part d'un élément quelconque de A et on démontrer que cet élément appartient aussi à B.
On démontre l'autre inclusion de même.

Exercice 16 (Correction rapide)

Il faut démontrer une équivalence : on procède par double implication.

- Sens réciproque
  C'est le sens facile.
  On suppose que $B \subset A \subset C$.
  Dans ce cas, $A \cup B = A$ et $A \cap C = A$.
- Sens direct
  Soit $x \in B$. $x \in B$ donc $x \in A \cup B = A \cap C$ donc $x \in A$ et ainsi $B \subset A$.
  L'autre inclusion se traite de façon similaire.

Exercice 17 (Correction rapide)

1. Faire un dessin.
2. E, $\overline{A}$ et $\emptyset$.
3. Repose sur la distributivité.

Python

Nous reparlerons de ces exercices après avoir avancé dans le cours d'informatique.

Exercice 18

```python
def fonction_1(x) :
    return ( 0 <= x and x <= 20 )

def fonction_2(x) :
    return not(fonction_1(x))
```

Exercice 19

```python
def fonction_3(x) :
    return ( x % 5 == 0 and x % 10 != 0 )
```

Exercice 20

```python
def fonction_4(x) :
    return ( x % 2 == 0 or x % 3 == 0 )
```