Fiche n° 22. Suites numériques

Réponses

22.1 a) $\boxed{\dfrac{12}{5}}$

22.1 b) $\boxed{8}$

22.1 c) $\boxed{\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}}$

22.1 d) $\boxed{\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}}$

22.2 a) $\boxed{13}$

22.2 b) $\boxed{29}$

22.3 a) $\boxed{2}$

22.3 b) $\boxed{2}$

22.4 a) $\boxed{21}$

22.4 b) $\boxed{10\ 000}$

22.4 c) $\boxed{2\ 001}$

22.4 d) $\boxed{10\ 201}$

22.5 a) $\boxed{\dfrac{17}{24}}$

22.5 b) $\boxed{\dfrac{1}{24}}$

22.6 a) $\boxed{\dfrac{3}{512}}$

22.6 b) $\boxed{\dfrac{3069}{512}}$

22.6 c) $\boxed{\dfrac{3}{1\ 024}}$

22.6 d) $\boxed{\dfrac{6141}{1024}}$

22.7 a) $\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}}$

22.7 b) $\boxed{\dfrac{11\sqrt{5}}{25}}$

22.8 a) $\boxed{3^n+(-2)^n}$

22.8 b) $\boxed{211}$

22.9 a) $\boxed{\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2}}$

22.9 b) $\boxed{2\sqrt{2}}$

22.10 a) $\boxed{257}$

22.10 b) $\boxed{65\ 537}$

22.10 c) $\boxed{F_n}$

22.10 d) $\boxed{F_{n+1}-2}$

22.10 e) $\boxed{F_{n+1}+2^{2^n+1}}$

22.10 f) $\boxed{F_{n+2}}$

Corrigés

22.1 a) $u_0=\dfrac{2\times 0+3}{5}\times 2^{0+2}=\dfrac{12}{5}$.

22.1 b) $u_1=\dfrac{2\times 1+3}{5}\times 2^{1+2}=\dfrac{5}{5}\times 8=8$.

22.1 c) $u_n=\dfrac{2(n+1)+3}{5}\times 2^{(n+1)+2}=\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$.

22.1 d) $u_{3n}=\dfrac{2\times 3n+3}{5}\times 2^{3n+2}=\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$

22.2 a) $u_1=2\times 1+3=5$ et $u_2=2\times 5+3=13$.

22.2 b) On calcule : $u_3=2\times 13+3=29$.

22.3 a) $w_1=\dfrac{1}{2}\times 2^2=\dfrac{4}{2}=2$ et, de même, $w_2=2$.

22.3 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

22.4 a) $a_{100}=a_0+100\times 2=201$.

22.4 b) $s_{100}=\dfrac{100\times(1+199)}{2}=\dfrac{100\times 200}{2}=100^2=10\ 000$.

22.4 c) $a_{1\ 000}=1+1\ 000\times 2=2\ 001$.

22.4 d) $s_{101}=\dfrac{101\times(1+201)}{2}=\dfrac{101\times 202}{2}=101^2=10\ 201$.

22.5 a) $b_{102} = \dfrac{b_{101} + b_{103}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+9}{12}}{2} = \dfrac{17}{24}.$

22.5 b) $r = u_{102} - u_{101} = \dfrac{17}{24} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{24}.$

22.6 a) $g_9 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}.$

22.6 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\dfrac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \dfrac{3 \times 1\,023}{512} = \dfrac{3069}{512}.$

22.6 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{3}{1\,024}.$

22.6 d) $\sigma_{11} = 6\dfrac{2^{11} - 1}{2^{11}} = \dfrac{3 \times 2\,047}{1\,024} = \dfrac{6141}{1024}.$

22.7 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\dfrac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{5}} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}.$

22.7 b) $r = \dfrac{h_{12}}{h_{11}} = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \dfrac{11\sqrt{5}}{25}.$

22.8 a) L'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$ dont les racines sont 3 et -2. Ainsi $u_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales conduisent au système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ dont les solutions sont $\alpha = \beta = 1$.

22.8 b) D'après le a) : $u_5 = 3^5 + (-2)^5 = 3^5 - 2^5 = 211$.

22.9 a) L'équation caractéristique est ici $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ et $v_n = \lambda 3^n + \mu(-2)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales donnent ici $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

22.9 b) Le plus simple (pour un si petit indice) est d'utiliser la relation de récurrence de la suite : $v_2 = 2v_1 + v_0 = 2\sqrt{2}$. Pour travailler les identités remarquables, d'après le a) : $v_2 = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}.$

22.10 a) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257.$

22.10 b) $F_5 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537.$

22.10 c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 = 2^{2^{n-1} \times 2} + 1 = 2^{2^n} + 1 = F_n.$

22.10 d) $F_n \times (F_n - 2) = \left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right) = \left(2^{2^{n+1}} - 1\right) = F_{n+1} - 2.$

22.10 e) $F_n^2 = \left(2^{2^n} + 1\right)^2 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 2 \cdot 2^{2^n} + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 + 2^{2^n + 1} = F_{n+1} + 2^{2^n + 1}.$

22.10 f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2 = F_{n+2} + 2 \cdot 2^{2^{n+1}} - 2(F_{n+1} - 1) = F_{n+2} + 2 \cdot 2^{2^{n+1}} - 2 \cdot 2^{2^{n+1}} = F_{n+2}.$