Suites réelles usuelles

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, donner l'expression du terme général de la suite (u_n) :

1. (u_n) est arithmétique, de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 5 .
2. (u_n) est arithmétique, de premier terme $u_0 = -6$ et de raison 10 .
3. (u_n) est arithmétique, de premier terme $u_1 = 2$ et de raison 4 .
4. (u_n) est géométrique, de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 5 .
5. (u_n) est géométrique, de premier terme $u_0 = -6$ et de raison 10 .
6. (u_n) est géométrique, de premier terme $u_1 = 2$ et de raison 4 .

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1. $S = 3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 57 + 60$
2. $S' = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$

Suites arithmético-géométriques

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer la somme des n premiers termes de la suite (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 5

Expliciter la suite de Fibonacci qui est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Exercice 6

Soit (u_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ 2u_{n+2} - 12u_{n+1} + 18u_n = 0 \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n, de u_0 et de u_1 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$$

1. Exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$.
   Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n en fonction de n.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = \dfrac{1}{6} \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ n \geqslant 2\,,\ 6u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

1. Exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$.
   Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n en fonction de n.

Approfondissement

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} \end{cases}$$

1. (a) On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{x-4}{x-3}$.
   Etudier les variations de f sur son ensemble de définition. On précisera (sans justifier) les limites.
   (b) Démontrer par récurrence que :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, "u_n existe et $u_n < 2$".
2. On définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n existe.
   (b) Démontrer que (v_n) est arithmétique.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 10

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 11

Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = \sqrt{2\,u_{n+1}^2 + 3\,u_n^2} \end{cases}$$

Exercice 12

On définit la suite (x_n) par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ x_{n+3} = 2\,x_{n+2} + x_{n+1} - 2\,x_n \end{cases}$$

On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = x_{n+1} - x_n$$

1. Montrer que la suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 et en déduire son terme général.
2. Déterminer le terme général de la suite (x_n) .
   On pourra considérer $u_0 + \cdots + u_{n-1}$.

Exercice 13

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 2^n \end{cases}$$

1. Déterminer α pour que la suite (t_n) de terme général $t_n = \alpha\, 2^n$ vérifie la même relation de récurrence que (u_n) .
2. Montrer que $(u_n - t_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 sans second membre.
3. En déduire le terme général de (u_n).

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
Démontrer que :
(u_n) est arithmétique $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$