Suites réelles usuelles

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1 (Correction complète)

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 + 5n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -6 + 10n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2 + 4(n-1)$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 5^n$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -6 \times 10^n$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2 \times 4^{n-1}$

Exercice 2 (Correction rapide)

1. On note (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raisin $r = 3$.
   La question revient à calculer $S = u_0 + \cdots + u_{19} = \sum_{k=0}^{19} u_k$.
   On applique la formule du cours et on trouve $S = 630$.
2. $S' = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} = \cdots = \dfrac{255}{1024}$

Suites arithmético-géométriques

Exercice 3 (Correction très rapide)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{3}{2} \times (-3)^n + \frac{1}{2}$$

Exercice 4 (Correction très rapide)

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{2}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La question revient à calculer $S = u_0 + \cdots + u_{n-1}$.
   $S = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2^n - 1}{2^n} + \dfrac{n}{2}$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 5 (Correction très rapide)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Exercice 6 (Correction très rapide)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left[u_0 + \left(\frac{1}{3}u_1 - u_0\right)n\right] \times 3^n$$

Exercice 7 (Correction très rapide)

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5}{2}(-1)^n + \dfrac{3}{2} \times 3^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{5}{4}\left(1-(-1)^{n+1}\right) - \dfrac{3}{4}\left(1-3^{n+1}\right)$

Exercice 8 (Correction très rapide)

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{8}{5}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{7}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{6}{5}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \dfrac{14}{5}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

Approfondissement

Exercice 9 (Correction complète)

1. (a) f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et f est dérivable sur cet ensemble.
Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
$f'(x) = \dfrac{x-3-(x-4)}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{(x-3)^2}$.
On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
f	$1 \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow 1$

(b)
- Initialisation : pour $n = 0$
u_0 est donné par l'énoncé donc u_0 existe.
De plus, $u_0 = 1$ donc $u_0 < 2$.
- Hérédité
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n < 2$.
Dans ce cas :
  → Tout d'abord, puisque $u_n \neq 3$, on a le droit de calculer $f(u_n)$, c'est-à-dire que u_{n+1} existe.
  → Ensuite, comme $u_n < 2$, par croissance de la fonction f sur $]-\infty, 3[$, on obtient $f(u_n) < f(2)$, c'est-à-dire $u_{n+1} < 2$
- Conclusion
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n < 2.}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question 1b, $u_n < 2$, donc $u_n \neq 2$, donc on peut diviser par $u_n - 2$, donc v_n existe.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n \text{ existe.}}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Remarque : on peut commencer les calculs en essayant de simplifier v_{n+1}. Ces calculs ne sont pas forcément les plus faciles. On peut donc également prendre la direction suivante :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}-2} - \frac{1}{u_n-2} \\
&= \frac{1}{\dfrac{u_n-4}{u_n-3} - 2} - \frac{1}{u_n-2} \\
&= \frac{1}{\dfrac{u_n-4-2(u_n-3)}{u_n-3}} - \frac{1}{u_n-2} \\
&= \frac{u_n-3}{-u_n+2} - \frac{1}{u_n-2} \\
&= \frac{-u_n+3-1}{u_n-2} \\
&= \frac{2-u_n}{u_n-2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est arithmétique}}$.

(c) On sait que (v_n) est arithmétique.
De plus, son premier terme est $v_0 = \dfrac{1}{u_0-2} = \dfrac{1}{1-2} = -1$ et sa raison est -1.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -1-n = -(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n - 2 = \frac{1}{v_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1}{-(n+1)} + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{-1 + 2(n+1)}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+1}{n+1}\ .}$$

Exercice 10 (Correction complète)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= 3u_n + 2v_n - \Big(2u_n + 3v_n\Big) \\ &= u_n - v_n \end{aligned}$$
Ceci prouve que $\boxed{\text{la suite } (u_n - v_n) \text{ est constante}}$.

   Par ailleurs, $u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$ donc $\boxed{\text{la valeur de la constante est } -1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   D'après la question précédente, on sait que $u_n - v_n = -1$. On s'en sert pour calculer :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n \\ &= 3u_n + 2\Big(u_n + 1\Big) \\ &= 5u_n + 2 \end{aligned}$$
Ceci prouve que $\boxed{(u_n) \text{ est une suite arithmético-géométrique}}$.
3. • Pour (u_n)

   → Point fixe

   On résout : $x = 5x + 2 \ \Leftrightarrow\ 4x = -2 \ \Leftrightarrow\ x = -\frac{1}{2}$

   → Suite auxiliaire

   On définit la suite (w_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + \frac{1}{2}$.

   La suite (w_n) est alors géométrique, de premier terme $w_0 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et de raison 5.

   → Terme général

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{3}{2} \times 5^n$

   On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}}$.

   • Pour (v_n)

   On utilise le fait que $(u_n - v_n)$ soit constante égale à -1 et on en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}}$.

Exercice 11 (Correction en partie détaillée)

Ceci est un exercice difficile, qui serait forcément accompagné de questions intermédiaires s'il devait être posé en DS.
Les questions pourraient être :
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 0$
2. On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n^2$. Déterminer la nature de la suite (v_n) .
3. En déduire le terme général de la suite (u_n) .

- Etape 1 : on montre par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 0$.
  Le raisonnement est similaire au raisonnement de l'exercice 9, question 1b.
  - → Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$
    On sait que $u_0 = 1$ donc u_0 existe et $u_0 \geqslant 0$.
    On sait que $u_1 = 2$ donc u_1 existe et $u_1 \geqslant 0$.
  - → Hérédité
    On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n et u_{n+1} existent et soient positifs ou nuls.
    Dans ce cas : $2u_{n+1}^2 + 3u_n^2 \geqslant 0$.
    Donc on peut en calculer la racine et u_{n+2} existe.
    Enfin, u_{n+2} étant la racine d'un réel, on a $u_{n+2} \geqslant 0$.

- Etape 2 : on utilise une suite auxiliaire
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n^2$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $$u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1}^2 + 3u_n^2}$$
  $$\Leftrightarrow \quad u_{n+2}^2 = 2u_{n+1}^2 + 3u_n^2$$
  $$\Leftrightarrow \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$$
  Ceci prouve que (v_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 sans second membre.
- Etape 3 : explicitation du terme général de (v_n)
  On trouve : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\dfrac{1}{4}(-1)^n + \dfrac{5}{4} \times 3^n$
- Etape 4 : explicitation du terme général de (u_n)
  On trouve : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \dfrac{\sqrt{(-1)^{n+1} + 5 \times 3^n}}{2}}$.

Exercice 12 (Correction complète)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= x_{n+3} - x_{n+2} \\ &= 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n - x_{n+2} \\ &= x_{n+2} - x_{n+1} + 2x_{n+1} - 2x_n \\ &= u_{n+1} + 2u_n \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\boxed{(u_n) \text{ est récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

On déterminer maintenant son terme général :

- Equation caractéristique
  On résout $x^2 - x - 2 = 0$
  Pour cette équation, $\Delta = 1 + 8 = 9$ et il y a donc deux solutions qui sont $r_1 = \dfrac{1-3}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$
- Terme général
  Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\,(-1)^n + \mu\, 2^n$
- Constantes
  Pour déterminer λ et μ, on résout :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 &=& x_1 - x_0 \\ u_1 &=& x_2 - x_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda &+& \mu &=& 1 \\ -\lambda &+& 2\mu &=& 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccl} \lambda &+& \mu &=& 1 & \\ &+& 3\mu &=& 2 & L_1 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} \lambda &=& 1-\mu &=& \frac{1}{3} \\ \mu &=& \frac{2}{3} & & \end{array}\right.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \frac{1}{3} \times (-1)^n + \frac{2}{3} \times 2^n}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'une part :

$$\begin{aligned} u_0 + \cdots + u_{n-1} &= x_1 - x_0 + \cdots + x_n - x_{n-1} \\ &= x_n - x_0 \\ &= x_n \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} u_0 + \cdots + u_{n-1} &= \frac{1}{3} \times (-1)^0 + \frac{2}{3} \times 2^0 + \cdots + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} + \frac{2}{3} \times 2^{n-1} \\ &= \frac{1}{3}\left((-1)^0 + \cdots + (-1)^{n-1}\right) + \frac{2}{3}\left(2^0 + \cdots + 2^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} + \frac{2}{3}\,\frac{1-2^n}{1-2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ x_n = \frac{1}{6}\left(1-(1)^n\right) - \frac{2}{3}\left(1-2^n\right)}$$

Exercice 13 (Correction en partie complète)

1. On raisonne par analyse-syhtèse.

   - Analyse
     On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que (t_n) de terme général $t_n = \alpha\, 2^n$ vérifie la même relation de récurrence que (u_n).
     Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
     $$\begin{aligned} & t_{n+2} - t_{n+1} - 6t_n = 2^n \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha\, 2^{n+2} - \alpha\, 2^{n+1} - 6\,\alpha\, 2^n = 2^n \\ \Leftrightarrow \quad & 4\alpha - 2\alpha - 6\alpha = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -4\,\alpha = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$
   - Synthèse
     On pose $\alpha = -\frac{1}{4}$ et on définit la suite (t_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ t_n = -\frac{1}{4}\, 2^n$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$.
     $$\begin{aligned} & t_{n+2} - t_{n+1} - 6t_n \\ = \quad & -\frac{1}{4} \times 2^{n+2} + \frac{1}{4} \times 2^{n+1} + 6 \times \frac{1}{4} \times 2^n \\ = \quad & -2^n + \frac{1}{2} \times 2^n + \frac{3}{2} \times 2^n \\ = \quad & -2^n + 2 \times 2^n \\ = \quad & 2^n \end{aligned}$$
   - Conclusion
     $\boxed{\text{En prenant } \alpha = -\frac{1}{4}\text{, la suite } (t_n) \text{ de terme général } t_n = \alpha\, 2^n \text{ vérifie la même relation de récurrence que } (u_n).}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - t_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On sait que $u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 2^n$ et $t_{n+2} - t_{n+1} - 6t_n = 2^n$.
   Donc :
   $$\begin{aligned} & u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = t_{n+2} - t_{n+1} - 6t_n \\ \Leftrightarrow \quad & \Big(u_{n+2} - t_{n+2}\Big) - \Big(u_{n+1} - t_{n+1}\Big) - 6\Big(u_n - t_n\Big) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & v_{n+2} - v_{n+1} - 6v_n = 0 \end{aligned}$$
   Ceci prouve que $\boxed{(u_n - t_n) \text{ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 sans second membre}}$.

3. Il faut trouver :
   $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = \frac{1}{4}(-2)^n + 3^n$
   D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \frac{1}{4}(-2)^n + 3^n - \frac{1}{4} \times 2^n}$

Exercice 14 (Correction rapide)

On procède par double implication.
Le sens direct est facile (même s'il faut faire attention aux quantificateurs).
Pour le sens réciproque, le plus simple est de démontrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est constante (comme dans l'ex 10).