DM1 - Correction

Exercice

- <u>Initialisation</u> : pour $n = 1$
  D'une part, $1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$
  D'autre part, $2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = 3$
  Ceci prouve que l'égalité est vraie au rang 1.

- <u>Hérédité</u>
  On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
  On calcule alors :
  $$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} &= \Big(1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n\Big) + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2 \times 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$
  C'est ce qu'on voulait, donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

- <u>Conclusion</u>
  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1}$