Nombres réels

Valeur absolue et partie entière

Exercice 1

Soient x et y deux réels.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour qu'on ait : $|x+y| = |x| + |y|$
Il s'agit du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Exercice 2

Soient x et y des réels.
Démontrer que :

1. $\min(x, y) = \dfrac{(x+y) - |x-y|}{2}$
2. $\max(x, y) = \dfrac{(x+y) + |x-y|}{2}$

Exercice 3

Vrai ou faux ? Démontrer.

1. Pour tous réels x et y, on a : $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
2. Pour tous réels x et y, on a : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$.
3. Pour tout entier naturel n, on a $2\lfloor \dfrac{n}{2} \rfloor = n$.

Exercice 4

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que $\lfloor \dfrac{n+m}{2} \rfloor + \lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \rfloor = n$.

Equations et inéquations

Exercice 5

On suppose que $|x-1| \leqslant 2$ et $-5 \leqslant y \leqslant -4$.
Encadrer au mieux les expressions suivantes :

1. $x+y$
2. $x-y$
3. xy
4. $\dfrac{x}{y}$
5. $|x|$
6. $|x| - |y|$
7. x^2
8. $\dfrac{x^2}{y^2 - x^2}$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{3x+1}{x^2+1} = -1$
2. $|x-7| = |4x-1|$
3. $|x+2| + |3x-1| = 4$
4. $|x+12| = |x^2-8|$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^3 + x^2 - 6x \leqslant 0$
2. $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$
3. $x < \dfrac{1}{x}$
4. $x + 1 > \dfrac{1}{x}$
5. $\dfrac{x-2}{x+3} < 0$
6. $\dfrac{x+4}{x-5} < 1$
7. $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2-1} \leqslant 1$
8. $|x-2| > 3$
9. $|x-3| + |x+4| \leqslant 7$
10. $|x+1| \leqslant |x-1|$
11. $x + \sqrt{x^2+1} > 0$
12. $\sqrt{x^2-4x+4} \leqslant \left| \dfrac{3}{2}x - 1 \right|$

Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Exercice 8

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. Si s est la borne supérieure de A, alors s est un majorant de A.
2. Si s est la borne supérieure de A, alors A admet un maximum M et $M \leqslant s$.
3. Si M est le maximum de A, alors M est aussi sa borne supérieure.
4. Si s est la borne supérieure de A, alors il existe $x \in A$ tel que $s - 1 \leqslant x$.

Exercice 9

Soit $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. A admet-il une borne supérieure dans $\mathbb{R}$? Si oui, laquelle ? Cette borne supérieure est-elle un maximum ?
2. A admet-il une borne inférieur dans $\mathbb{R}$? Si oui, laquelle ? Cette borne est-elle un minimum ?

Exercice 10

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par :

$$A = \left\{ \frac{x-y}{x+y+3} \mid x \in [-1, 1],\ y \in [-1, 1] \right\}$$

Trouver un majorant de A.

Exercice 11

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par :

$$A = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Déterminer, s'ils existent :

1. $\sup(A)$
2. $\max(A)$
3. $\inf(A)$
4. $\min(A)$

Exercice 12

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par :

$$A = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \mid (m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3 \right\}$$

Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de A. Préciser s'il s'agit du plus petit élément (respectivement du plus grand élément) de A.

Approfondissement

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lfloor \frac{k+3\sqrt{k}}{k} \rfloor$

Simplifier S_n.

Exercice 14

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
2. Calculer $E = \lfloor \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right) \rfloor$

Exercice 15

Soient $a, b, c \in [0, +\infty[$.

Le but de cet exercice est de démontrer qu'au moins un des réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

1. Démontrer que, si a, b ou c est supérieur ou égal à 1, alors la propriété est vraie.
2. On suppose désormais que a, b et c sont dans $[0, 1[$.
   (a) Déterminer le signe des expressions $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre $x(1-x)$ sous forme canonique et en déduire que $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
   (c) En déduire que :
   $$a(1-b) \times b(1-c) \times c(1-a) \leqslant \frac{1}{4^3}$$
   (d) Conclure.