Nombres réels - Correction

Valeur absolue et partie entière

Exercice 1 (Correction complète)

Soient x et y deux réels.
On transforme :

$$\begin{aligned}
& |x+y| = |x|+|y| \\
\Leftrightarrow\quad & (x+y)^2 = \Big(|x|+|y|\Big)^2 \qquad \text{(on a bien une équivalence car termes positifs)} \\
\Leftrightarrow\quad & x^2+2xy+y^2 = x^2+2|xy|+y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & xy = |xy| \\
\Leftrightarrow\quad & x \text{ et } y \text{ sont de même signe}
\end{aligned}$$

$\boxed{x+y| = |x|+|y| \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont de même signe.}}$

Exercice 2 (correction en partie complète)

1. On distingue les cas.
   - Cas où $x \leqslant y$
     D'une part, dans ce cas, $\min(x,y) = x$.
     D'autre part, $\dfrac{(x+y)-|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+x-y}{2} = x$
   - Cas où $x > y$
     D'une part, dans ce cas, $\min(x,y) = y$.
     D'autre part, $\dfrac{(x+y)-|x-y|}{2} = \dfrac{x+y-x+y}{2} = y$
   - Conclusion
     Dans tous les cas : $\boxed{\min(x,y) = \dfrac{(x+y)-|x-y|}{2}}$
2. Idem.

Exercice 3 (Correction complète)

1. Faux. Contre-exemple avec $x = y = \dfrac{1}{2}$.
2. Vrai.
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{llcll}
 & \lfloor x \rfloor & \leqslant & x & \\
\text{et} & \lfloor y \rfloor & \leqslant & y & \\
\text{donc} & \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor & \leqslant & x+y & \text{(somme d'inégalités)} \\
\text{d'où} & \lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \rfloor & \leqslant & \lfloor x+y \rfloor & \text{(partie entière conserve les inégalités)} \\
\text{c'est-à-dire} & \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor & \leqslant & \lfloor x+y \rfloor & \text{(partie entière d'un entier)}
\end{array}$$

3. Faux. Contre-exemple avec $n = 3$.
   Remarque : mais c'est vrai si n est pair.

Exercice 4

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$
On distingue les cas selon la parité de m et n.

- Si m et n sont tous les deux pairs

  On peut écrire $m = 2k$ et $n = 2p$ avec $k, p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} & \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor \\ = \quad & \lfloor \frac{2p+2k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{2p-2k+1}{2} \rfloor \\ & = \lfloor p+k \rfloor + \lfloor p-k+\frac{1}{2} \rfloor \\ & = p+k+p-k \qquad \text{(car } p \text{ et } k \text{ sont des entiers)} \\ & = 2p \\ & = n \end{aligned}$$

- Les autres cas se traitent de même

Equations et inéquations

Exercice 5 (Correction en partie détaillée)

Tout d'abord, on transforme :

$$\begin{aligned} |x-1| \leqslant 2 &\Leftrightarrow -2 \leqslant x-1 \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3 \end{aligned}$$

Ensuite, je me rends compte alors que j'ai déjà tapé la moitié du corrigé que j'ai fait une faute d'énoncé... Je voulais écrire $-5 \leqslant y \leqslant -4$, ce qui enlève une partie des difficulté. C'est ça que je traite dans ce corrigé.

1. **(Correction détaillée)**
   On peut additionner les inégalités membre à membre. On trouve : $\boxed{-6 \leqslant x+y \leqslant -1}$

2. **(Correction détaillée)**
   Attention : on ne peut pas soustraire les inégalités membre à membre.
   On commence donc par transformer : $-5 \leqslant y \leqslant -4$ donc $-4 \leqslant -y \leqslant -5$.
   En additionnant ces inégalités avec $-1 \leqslant x \leqslant 3$, on trouve $\boxed{3 \leqslant x-y \leqslant 8}$

3. **(Correction détaillée)**
   - Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$
     Dans ce cas :
     $\begin{cases} & 0 \leqslant -x \leqslant 1 \\ \text{et} & 4 \leqslant -y \leqslant 5 \end{cases}$
     Dans ces inégalités, tous les membres sont positifs : on peut donc les multiplier entre elles.
     On trouve : $0 \leqslant xy \leqslant 5$
   - Si $0 \leqslant x \leqslant 3$
     Dans ce cas :
     $\begin{cases} & 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ \text{et} & 4 \leqslant -y \leqslant 5 \end{cases}$
     Dans ces inégalités, tous les membres sont positifs : on peut donc les multiplier entre elles.
     On trouve : $0 \leqslant -xy \leqslant 15$ d'où $-15 \leqslant xy \leqslant 0$
   - Conclusion : $\boxed{-15 \leqslant xy \leqslant 5}$

4. **(Correction rapide)**
   On commence par encadrer $\dfrac{1}{y}$. Ensuite, on fait la même distinction de cas que dans la question 3.
   Tous calculs faits : $\boxed{-\dfrac{3}{4} \leqslant \dfrac{x}{y} \leqslant \dfrac{1}{4}}$

5. **(Correction rapide)**
   $\boxed{0 \leqslant |x| \leqslant 3}$

6. **(Correction rapide)**
   Tout d'abord, $4 \leqslant |y| \leqslant 5$.
   En appliquant les mêmes principes que dans la question 2, on obtient : $\boxed{-5 \leqslant |x|-|y| \leqslant -1}$

7. **(Correction rapide)**
   A partir de la question 5, on obtient : $\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 9}$

8. **(Correction rapide)**
   On réutilise les techniques vues pour soustraire et diviser. On obtient : $\boxed{0 \leqslant \dfrac{x^2}{y^2-x^2} \leqslant \dfrac{9}{7}}$

Exercice 6 (Correction rapide)

1. On résout sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{3x+1}{x^2+1} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x+1 = -x^2-1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+3x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)(x+2) = 0 \quad \text{(racines évidentes)}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{-2,-1\} \text{ .}}$

2. On résout sur $\mathbb{R}$

$$|\,x-7\,| = |\,4x-1\,|$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-7 = 4x-1 \\ \text{ou} \\ x-7 = -4x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{-2, \frac{8}{5}\} \text{ .}}$

3. On commence par faire un tableau de signe pour savoir comment enlever les valeurs absolues.
   - Si $x \leqslant -2$: pas de solution
   - Si $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$: $-\frac{1}{2}$ est solution
   - Si $\frac{1}{3} \leqslant x$: $\frac{3}{4}$ est solution

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\} \text{ .}}$

4. *Fait en classe.*

Exercice 7 (Correction rapide)

1. On factorise par x, puis on conclut à l'aide d'un tableau de signes. On trouve $]-\infty,-3] \cup [0,2]$

2. *Fait en classe*

3. *Fait en classe*

4. On procède comme dans la question 3. On trouve : $\left]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},0\right[\cup \left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$

5. Tableau de signes. On trouve : $]-3,2[$

6. *Fait en classe*

7. On procède comme dans les questions précédentes : on se ramène à comparer une fraction factorisée à 0.
   Pour l'inéquation $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2-1}$, on trouve : $]-1,0] \cup]1,+\infty[$
   Pour l'inéquation $\dfrac{x}{x^2-1}$, on trouve : $]-\infty,-1[\cup \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},1\right[\cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$
   Conclusion : $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$

8. On fait un tableau de signe pour savoir comment enlever les valeurs absolue. On trouve : $]-\infty,-1[\cup]5,+\infty[$.

9. *Fait en classe*

10. On fait un tableau de signe pour savoir comment enlever les valeurs absolues. On trouve : $]-\infty,0]$
11. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geqslant 0$ (somme de positifs) donc on résout sur $\mathbb{R}$.

    $$\begin{array}{ll} & x+\sqrt{x^2+1} > 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2+1} > -x \end{array}$$

    On souhaite ensuite passer au carré ; pour cela il faut connaître le signe de chaque membre.

    - Si $x \geqslant 0$
      Dans ce cas, d'une part, $\sqrt{x^2+1} > 0$ et d'autre part $0 \geqslant -x$, donc l'inégalité est vraie.
    - Si $x < 0$
      Dans ce cas :
      $$\begin{array}{ll} & \sqrt{x^2+1} > -x \\ \Leftrightarrow & x^2+1 > (-x)^2 \\ \Leftrightarrow & 1 > 0 \end{array}$$
      Cette dernière ligne est vraie, donc par équivalences la première ligne est aussi vraie.

    Conclusion : l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

12. On constate tout d'abord que $x^2-4x+4=(x-2)^2$, donc on résout sur $\mathbb{R}$ (pas de valeur interdite).
    On passe au carré (possible car tous les membres sont positifs).
    On trouve $]-\infty,2] \cup \left[\dfrac{6}{5},+\infty\right[$

Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Exercice 8 (Correction rapide)

1. Vrai. Ca fait partie de la définition.
2. Faux. Contre-exemple : $[0,1[$.
3. Vrai.
4. Vrai.
   En effet : $s-1<s$, donc $s-1$ n'est pas un majorant de A, donc il existe un $x \in A$ tel que $s-1 \leqslant x$.

Exercice 9 (Correction très rapide)

En fait, $A = \left\{ 1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}\,, \dots \right\}$

1. A admet un maximum : 1. Ce maximum est donc aussi la borne supérieure de A.
2. A n'a pas de minimum mais admet 0 comme borne inférieure.

Exercice 10 (Correction compplète)

Soient $x \in [-1,1]$ et $y \in [-1,1]$. On a :

$$\begin{array}{cl} & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \text{et} & -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ \text{donc} & -1 \leqslant -y \leqslant 1 \\ \text{d'où} & -2 \leqslant x-y \leqslant 2 \\ & \\ \text{d'autre part} & 1 \leqslant x+y+3 \leqslant 5 \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x+y+3} \leqslant 1 \end{array}$$

On distingue alors les cas :

- <u>Si $x-y \leqslant 0$</u> : dans ce cas, $\dfrac{x-y}{x+y+3} \leqslant 0$
- <u>Si $x-y > 0$</u> : dans ce cas, on peut multiplier les inégalités et ainsi $0 < \dfrac{x-y}{x+y+3} \leqslant 2$
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{2 est un majorant de } A.}$

Exercice 11 (Correction complète)

On commence par dresser le tableau de variations complet de f.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- D'une part :
  D'après le tableau, 1 est un majorant de A et $1 = \dfrac{1}{0^2+1} \in A$.
  Donc $\boxed{A \text{ admet 1 pour maximum}}$ et $\boxed{A \text{ admet 1 pour borne supérieure}}$.
- D'autre part :
  D'après le tableau, 0 minore A.
  Soit m un minorant de A : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ m \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$
  Donc, en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$, $m \leqslant 0$.
  Ceci prouve que $\boxed{0 \text{ est la borne inférieure de } A}$.
  Enfin : si A admet un minimum, ce minimum est nécessairement 0. Puisque $0 \notin A$, $\boxed{A \text{ n'a pas de minimum}}$.

Exercice 12 (Correction complète)

- <u>Concernant la borne supérieure</u>
  On constate que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant m$ donc $\dfrac{1}{m} \leqslant 1$.
  Ainsi, pour tout $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \leqslant 3$, ce qui prouve que 3 majore A.
  Par ailleurs, pour $m = n = p = 1$, on a $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} = 3$ donc $3 \in A$.
  Ces deux points prouvent que $\max(A) = 3$.
  Et donc, nécessairement : $\boxed{A \text{ a une borne supérieure, qui est 3, et qui est aussi le plus grand élément de } A \text{ .}}$
- <u>Concernant la borne inférieure</u>
  Tout d'abord, A est une partie non vide et minorée (par 0 par exemple) de $\mathbb{R}$, donc A admet une borne inférieure.
  Soit α un minorant de A.
  Ainsi, pour tout $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $\alpha \leqslant \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}$.
  D'où, en passant à la limite quand $m \to +\infty$, puis quand $n \to +\infty$, puis quand $p \to +\infty$: $\alpha \leqslant 0$.
  Comme 0 est un minorant de A, ceci prouve que 0 est le plus grand de tous les minorants de A et $\boxed{\inf(A) = 0}$.
  Enfin, si $0 \in A$, alors il existe $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} = 0$.
  0 étant ainsi la somme de trois nombres positifs, on a nécessairement $\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p} = 0$, ce qui est impossible.
  Donc $0 \notin A$ et $\boxed{A \text{ n'a pas de plus petit élément}}$.

Approfondissement

Exercice 13 (Correction complète)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Tout d'abord, $\lfloor \frac{k+3\sqrt{k}}{k} \rfloor = 1 + \lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \rfloor$.

Or :

$$\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \rfloor = \begin{cases} 3 & \text{si } k = 1 \\ 2 & \text{si } k = 2 \\ 1 & \text{si } 3 \leqslant k \leqslant 9 \\ 0 & \text{si } 10 \leqslant k \end{cases}$$

D'où on déduit que :
$S_1 = 4$
$S_2 = 7$
Si $3 \leqslant n \leqslant 9$, alors $S_n = n + 5 + (n - 3 + 1) = 2n + 3$
Si $10 \leqslant n$, alors $S_n = n + 5 + 7 = n + 12$

Exercice 14 (Correction incomplète)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On commence par l'inégalité de droite.
   On transforme l'inégalité que l'on veut démontrer :
   $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
   $$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) < \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$$
   $$\Leftrightarrow \quad 1 < \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$$
   Or, cette dernière ligne est vraie. Donc, par équivalences, la première ligne est vraie aussi.
   On démontre l'autre inégalité de même.
2. On encadre chacun des termes de la somme avec la question 1.
   On somme. De part et d'autre de l'inégalité, on obtient des sommes télescopiques.
   Il vient : $\sqrt{10001} - 1 < \frac{1}{2}\left(1 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) < \sqrt{10000}$
   D'où $E = 99$.

Exercice 15 (Correction incomplète)

1. On suppose que $a \geqslant 1$.

   Dans ce cas, $1 - a \leqslant 0$ et donc, par produit $c(1-a) \leqslant 0$, ce qui implique $c(1-a) \leqslant \frac{1}{4}$.

   Si $b \geqslant 1$ ou $c \geqslant 1$, on procède de même.

   $\boxed{\text{Si } a, b \text{ ou } c \text{ est supérieur ou égale à 1, alors la propriété est vraie.}}$

2. (a) On manipule les inégalités :

$$\begin{array}{rl} & 0 \leqslant a < 1 \\ \text{et} & 0 \leqslant b < 1 \\ \text{donc} & -1 < -b \leqslant 0 \\ \text{d'où} & 0 < 1 - b \leqslant 1 \\ \text{et donc} & 0 \leqslant a(1-b) \quad \text{(on peut mulitpler car tous les membres sont positifs)} \end{array}$$

   On procède de même pour les deux autres.

   $\boxed{a(1-b),\ b(1-c) \text{ et } c(1-a) \text{ sont positifs ou nuls}}$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} x(1-x) & = & -x^2 + x \\ & = & -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{array}$$

   Ainsi :

$$\begin{array}{rl} & 0 \leqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{donc} & -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0 \\ \text{donc} & \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4} \\ \text{c'est-à-dire} & x(1-x) \leqslant \frac{1}{4} \end{array}$$

   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}\ .}$

   (c) $a(1-b) \times b(1-c) \times c(1-a) = a(1-a) \times b(1-b) \times c(1-c)$

   Or, d'après les deux questions précédentes, on a :

$$\begin{array}{rl} & 0 \leqslant a(1-a) \leqslant \frac{1}{4} \\ \text{et} & 0 \leqslant b(1-b) \leqslant \frac{1}{4} \\ \text{et} & 0 \leqslant c(1-c) \leqslant \frac{1}{4} \end{array}$$

   D'où, par produit d'inégalités où tous les membres sont positifs : $a(1-a) \times b(1-b) \times c(1-c) \leqslant \frac{1}{4^3}$.

   C'est-à-dire : $\boxed{a(1-b) \times b(1-c) \times c(1-a) \leqslant \frac{1}{4^3}}$

   (d) On raisonne par l'absurde. On suppose que $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-b)$ sont tous strictement supérieurs à $\frac{1}{4}$.

   Alors, par produit d'inégalités où tous les membres sont positifs, on aurait $a(1-b) \times b(1-c) \times c(1-a) > \frac{1}{4^3}$.

   Ceci est en contradiction avec la question précédente.

   Donc $\boxed{\text{Si } a, b \text{ et } c \text{ sont dans } [0,1[, \text{ alors la propriété est vraie}}$.

   Et : $\boxed{\text{Dans tous les cas, la propriété est vraie.}}$