

## Trigonométrie

### Formules trigonométriques

#### Exercice 1

- Pour  $x \in \mathbb{R}$ , exprimer  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos(x)$ .
- Retrouver alors la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ .

#### Exercice 2

- Pour  $a \in \mathbb{R}$ , démontrer que :

$$\sin(5a) = 5 \sin(a) - 20 \sin^3(a) + 16 \sin^5(a)$$

- En déduire la valeur de  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

#### Exercice 3

Soient  $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ .

- Calculer  $\cos(a+b) - \cos(a-b)$ .
- Factoriser  $\cos p - \cos q$  et  $\sin p + \sin q$ .
- Simplifier  $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$ .
- En déduire la valeur de  $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$ .

#### Exercice 4

Démontrer la formule d'addition de tangente, à savoir :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

### Equations trigonométriques

#### Exercice 5

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

- $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ .
- $(2 \sin(x) - 1) (\sqrt{3} \cos(x) - 3) = 0$ .

#### Exercice 6

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

- $\cos(x) + \sin(x) = 0$ .
- $\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

#### Exercice 7

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

- $\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) = 0$ .
- $\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = \sqrt{2}$ .
- $\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) = 1$ .

#### Exercice 8

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

- $2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ .
- $2 \cos^2(x) - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cos(x) + \sqrt{\frac{3}{2}} = 0$ .  
*On pourra vérifier que  $5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ .*
- $\cos(4x) + 2 \sin(x) \cos(x) = 0$ .
- $\tan^2(2x) + (1 - \sqrt{3}) \tan(2x) - \sqrt{3} = 0$ .

#### Exercice 9

Résoudre les systèmes suivants :

- $(S_1) : \begin{cases} \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
- $(S_2) : \begin{cases} \cos(x) = -\frac{3}{5} \\ \sin(x) = -\frac{4}{5} \end{cases}$

### Approfondissement

#### Exercice 10

- On considère le réel  $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  vérifiant :

$$\cos(a) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Calculer  $\cos(2a)$  et en déduire  $a$ .

- Montrer que  $\sin(a) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .
- Résoudre alors dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(x) = 2$$

#### Exercice 11

Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

- Calculer  $\frac{1}{\tan(\theta)} - \frac{2}{\tan(2\theta)}$  en précisant l'ensemble de validité.
- En déduire une expression simple de  $\sum_{k=0}^n 2^k \tan(2^k)$ .