

Trigonométrie

Prérequis

Cercle trigonométrique. Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos. Fonction tangente.

Dès le début de la 1ère année

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1



Donner les valeurs :

| | | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> | e) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $\cos(7\pi) \dots\dots$ | <input type="text"/> | f) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> |

Calcul 8.2



Simplifier :

| | | | |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ | <input type="text"/> | d) $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> | e) $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> |
| c) $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ | <input type="text"/> | | |

Signe du cosinus et du sinus

Calcul 8.3



Donner le signe :

| | | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> | e) $\sin\left(\frac{14\pi}{5}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $\tan\left(\frac{13\pi}{5}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> | f) $\tan\left(-\frac{3\pi}{5}\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> |

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.4



Simplifier :

| | | | |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> | c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | <input type="text"/> | d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) \dots\dots$ | <input type="text"/> |

Formules de duplication

On rappelle les formules suivantes : $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ et $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Calcul 8.5



En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \dots\dots\dots$ b) $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \dots\dots\dots$ c) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \dots\dots\dots$

Calcul 8.6



Simplifier pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

a) $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} \dots\dots\dots$ b) $\frac{\cos(2x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} \dots\dots\dots$

Équations trigonométriques

Calcul 8.7



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$ d) $\tan(x) = -1 \dots\dots\dots$
b) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots$ e) $\cos^2(x) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$
c) $\sin(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \dots\dots\dots$ f) $|\tan(x)| = \frac{1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots$

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots$ d) $|\sin(x)| \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots$
b) $\cos(x) \leq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \dots\dots\dots$ e) $\tan(x) \geq 1 \dots\dots\dots$
c) $\sin(x) \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots$ f) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \dots\dots\dots$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc}
 \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[& \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right] & \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\} & \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\} \\
 \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} & 1 & \tan x & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{\cos(x)} & -\frac{1}{2} \\
 \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] & \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right] & \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\} & \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \\
 0 & \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} & \left\{-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\} & \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\} \\
 \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} & \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] & \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} & < 0 \\
 \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right] & \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] & \left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right] & > 0 \\
 2 \cos x & -2 \cos x & \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] & \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\} \\
 -\frac{1}{2} & \left\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right\} & \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[& 0 & -1 & 0 & 1 \\
 \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\} & \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} & \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\} \\
 \sqrt{2}-1 & \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right] & \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\} & \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\} & > 0 & < 0 & 1 \\
 -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sin x & < 0 & \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right] & > 0 & -1 - \sqrt{3}
 \end{array}$$