Devoir Surveillé n°1

Samedi 28 septembre 2024 - Durée : 2h30

L'usage de la calculatrice est interdit.
Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.
Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Exercice 1

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. $\forall k \in \mathbb{N},\ k-1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall s \in \mathbb{R},\ \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $s+t>0$
3. $\exists s \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ s+t>0$
4. $\forall m \in \mathbb{Z},\ \exists p \in \mathbb{N}$ tel que $m^2 = p-1$.

Exercice 2

1. Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue le réel x :

$$(E_1)\ :\ |x^2+6x+5| \leqslant x+5$$

2. Soit $m \in \mathbb{R}$.
   Résoudre l'équation suivante, d'inconnue le réel x :

$$(E_2)\ :\ x^2+2m(x+1)=3$$

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2\, k! \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2+1)\, k! \qquad W_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$$

1. (a) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (k+1)! - k! = k \times k!$$

   (b) Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme W_n en fonction de n.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 2 + (n-2) \times (n+1)!$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_n en fonction de T_n et W_n.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire T_n sous la forme $T_n = t_n \times (n+1)!$ et donner une expression de t_n en fonction de n.

Exercice 4

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} - u_n = 0 \end{cases}$$

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
Exprimer S_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est d'étudier une figure géométrique appelée flocon de von Koch. Cette figure s'obtient en partant d'un triangle équilatéral de côté 1 que l'on modifie de la façon suivante :

- On divise chaque côté en trois segments de longueurs égales
- Sur chaque segment médian obtenu précédemment, on construit un triangle équilatéral ayant pour base ce segment médian (et "orienté" vers l'extérieur).
- On supprime tous les segments médians, c'est-à-dire toutes les bases des triangles équilatéraux ainsi construits.

On réitère ensuite indéfiniment le processus. Le flocon de von Koch est la limite de la courbe obtenue (après une "infinité" d'étapes).

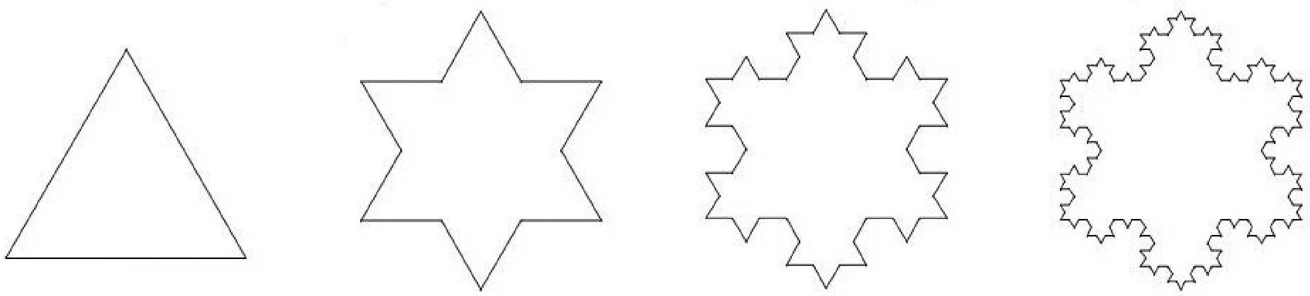

Figure initiale (n = 0)   Figure après l'étape n = 1   Figure après l'étape n = 2   Figure après l'étape n = 3

Pour chaque entier naturel n, on note l_n la longueur de chaque segment de la construction après la $n^{\text{ème}}$ étape (ainsi, $l_0 = 1$), N_n le nombre de segments de la construction après la $n^{\text{ème}}$ étape (ainsi, $N_0 = 3$), P_n le périmètre de la construction après la $n^{\text{ème}}$ étape et A_n l'aire de la construction après la $n^{\text{ème}}$ étape.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer l_n en fonction de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer N_n en fonction de n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer P_n en fonction de n. Que peut-on en déduire pour le périmètre du flocon de von Koch ?
4. (a) Soit ABC un triangle équilatéral de côté $c > 0$. Démontrer que l'aire de ABC est $c^2\,\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n - A_0$ est égale à la somme des n premiers termes d'une suite géométrique que l'on précisera.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A_n en fonction de n.
   (e) Que peut-on en déduire pour l'aire du flocon de von Koch ?