Trigonométrie - Correction

Formules trigonométriques

Exercice 1 (Correction complète)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x+x) \\
&= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\
&= \Big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\Big)\cos(x) \;-\; \Big(2\cos(x)\sin(x)\Big)\sin(x) \\
&= \cos^3(x) - \sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
&= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) \\
&= \cos^3(x) - 3\Big(1-\cos^2(x)\Big)\cos(x) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)
\end{aligned}$$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\,,\; \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)}$

2. On pose $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

L'égalité précédente devient :

$$\begin{aligned}
& \cos\left(3 \times \frac{2\pi}{3}\right) = 4\cos^3\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\; & \cos(2\pi) = 4\cos^3\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\; & 1 = 4\cos^3\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\; & 4X^3 - 3X - 1 = 0 && \left(\text{en posant } X = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
\Leftrightarrow\; & (X-1)(4X^2 + 4XS + 1) = 0 && (\text{1 est racine évidente}) \\
\Leftrightarrow\; & (X-1)(2X+1)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\; & X = 1 \text{ ou } X = -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\; & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \text{ ou } \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On élimine la première valeur à cause du cercle trigonométrique. Il reste donc $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}}$.

Exercice 2 (Correction complète)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin(5a) &= \sin(4a+a) \\
&= \sin(4a)\cos(a)+\sin(a)\cos(4a) \\
&= 2\Big(\sin(2a)\Big)\Big(\cos(2a)\Big)\cos(a)+\sin(a)\Big(1-2\sin^2(2a)\Big) \\
&= 2\Big(2\sin(a)\cos(a)\Big)\Big(1-2\sin^2(a)\Big)\cos(a)+\sin(a)-2\sin(a)\Big(\sin(2a)\Big)^2 \\
&= 4\sin(a)\cos^2(a)-8\sin^3(a)\cos^2(a)+\sin(a)-2\sin(a)\Big(2\sin(a)\cos(a)\Big)^2 \\
&= 4\sin(a)\Big(1-\sin^2(a)\Big)-8\sin^3(a)\Big(1-\sin^2(a)\Big)+\sin(a)-8\sin^3(a)\Big(1-\sin^2(a)\Big) \\
&= 5\sin(a)-20\sin^3(a)+16\sin^5(a)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \sin(5a) = 5\sin(a)-20\sin^3(a)+16\sin^5(a)}$$

2. On pose $a = \dfrac{\pi}{5}$.
L'égalité précédente devient :

$$\sin(5 \times \frac{\pi}{5}) = 5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)-20\sin^3\left(\frac{\pi}{5}\right)+16\sin^5\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 0 = 5X-20X^3+16X^5 && \text{(en posant } X = \frac{\pi}{5}\text{)} \\
&\Leftrightarrow\ 0 = X\Big(5-20X^2+16X^4\Big) \\
&\Leftrightarrow\ 16X^4-20X^2+5=0 && \text{(car } X \neq 0\text{)} \\
&\Leftrightarrow\ 16Y^2-20Y+5=0 && \text{(en posant } Y = X^2\text{)}
\end{aligned}$$

Pour cette dernière équation, $\Delta = 400-320 = 80$.
Cette équation a donc deux solutions, qui sont $Y_1 = \dfrac{20-\sqrt{80}}{32} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $Y_2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$
Ces deux racines sont positives.
On obtiendrait donc :

$$\begin{cases}
\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \\
\text{ou } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \\
\text{ou } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \\
\text{ou } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}
\end{cases}$$

Or : $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) > 0$ (par observation du cercle trigonométrique) donc on élimine les deux valeurs négatives.
De plus : $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} \simeq 0,58$ et $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}} \simeq 0,95$.
Puisque $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) > \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, on élimine donc la deuxième valeur.

Il reste : $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}}$.

Exercice 3 (Correction rapide)

1. On trouve : $\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin(a\sin(b)$
2. On essai de se ramener à la formule précédente. Après résolution d'un système, on voit que, pour cela, il faut prendre $a=\dfrac{p+q}{2}$ et $b=\dfrac{p-q}{2}$.
   On trouve : $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
   Pour la deuxième factorisation, on raisonne de même.
   D'une part, $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cos(b)$.
   Donc $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
3. On utilise la questions précédente et on trouve $\dfrac{\cos(p)-\cos(q)}{\sin(p)+\sin(q)}=-\tan\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
4. On cherche p et q tels que $p-q=\dfrac{\pi}{12}$.
   On voit que $p=\dfrac{\pi}{3}$ et $q=\dfrac{\pi}{4}$ conviennent.
   En remplaçant dans l'expression de la question précédente, on trouve : $\tan\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Exercice 4 (Correction rapide)

Tout d'abord, l'expression a du sens si et seulement si : $\begin{cases} a+b \text{ n'est pas congru à } \dfrac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi \\ a \text{ n'est pas congru à } \dfrac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi \\ b \text{ n'est pas congru à } \dfrac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi \\ \tan(a)\tan(b)\neq 1 \end{cases}$

Cela fait beaucoup de conditions et nous n'allons pas les expliciter. On les garde cependant à l'esprit.

Ensuite : on démontre cette égalité en procéder par "d'une part / d'autre part".

D'une part $\tan(a+b)=\cdots=\dfrac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$

D'autre part $\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}=\cdots=\dfrac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$

Equations trigonométriques

Exercice 5

Fait en classe.

Exercice 6 (Correction complète)

1. - Méthode 1
     Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}
& \cos(x) + \sin(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$
   - Méthode 2
     Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}
& \cos(x) + \sin(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos(x) = -\sin(x) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$
     (parce que ça se voit sur le cercle trigonométrique)
   - Conclusion
     $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.}$
   - Remarque
     On peut regrouper les deux familles de solutions en :
     $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x \equiv x + \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ \text{ou } x \equiv -x - \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -x - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

Remarque

C'est une question pour laquelle, en restant aux expressions avec des "congru à ... modulo [2π]", il y a un gros risque d'erreur.

Exercice 7 (Correction très rapide)

1. On trouve l'équation équivalente à : $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

   Les solutions sont les $\frac{\pi}{6}$ modulo 2π et les $-\frac{5\pi}{6}$ modulo 2π .
2. On trouve l'équation équivalente à : $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

   Les solutions sont les $\frac{7\pi}{12}$ modulo 2π et les $\frac{\pi}{12}$ modulo 2π .
3. *Sera fait en classe.*

Exercice 8 (Correction complète)

1. On résout sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \left\{\begin{array}{l} 2x-\dfrac{\pi}{3}\equiv\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x-\dfrac{\pi}{3}\equiv-\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\quad & \left\{\begin{array}{l} 2x\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x\equiv\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\quad & \left\{\begin{array}{l} x\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [\pi] \\ \text{ou} \\ x\equiv\dfrac{\pi}{12}\ [\pi] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On pose $X=\cos(x)$ et on résout $2X^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})X+\sqrt{\dfrac{3}{2}}=0$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\
&= 5+2\sqrt{6}-4\sqrt{6} \\
&= 5-2\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Or : $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{2}$

D'où $\Delta=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$.

Ainsi, l'équation en X a deux solutions, qui sont :

$X_1=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $X_2=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On revient à l'équation de départ.

$$\begin{aligned}
& 2\cos^2(x)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cos(x)+\sqrt{\frac{3}{2}}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left\{\begin{array}{l} \cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \cos(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ens. des solutions est : } \left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \cos(4x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos(4x) + \sin(2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos(4x) = -\sin(2x) \\ \Leftrightarrow\ & \cos(4x) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x) \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{l} 4x \equiv \frac{\pi}{2} + 2x\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 4x \equiv -\frac{\pi}{2} - 2x\ [2\pi] \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \tan(2x)$ et on résout $X^2 + (1-\sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} \\ &= 1 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^3 + 4\sqrt{3} \\ &= 1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^3 \\ &= (1+\sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

L'équation en X a donc deux solutions qui sont :

$X_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3} - (\,1+\sqrt{3}\,)}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3} + (\,1+\sqrt{3}\,)}{2} = \sqrt{3}$

On revient à l'équation de départ.

$$\begin{aligned} & \tan^2(2x) + (1-\sqrt{3})\tan(2x) - \sqrt{3} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{l} \tan(2x) = -1 \\ \text{ou} \\ \tan(2x) = \sqrt{3} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{l} 2x \equiv -\frac{\pi}{4}\ [\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi] \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{l} x \equiv -\frac{\pi}{8}\ [\frac{\pi}{2}] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\frac{\pi}{2}] \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \left\{-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Exercice 9 (Correction très rapide)

La méthode consiste à placer le point correspondant sur le cercle trigonométrique puis à décrire les angles compatibles avec ce point.

1. $(S_1) \Leftrightarrow x \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$
2. $(S_2) \Leftrightarrow x \equiv -\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)\ [2\pi]$

Approfondissement

Exercice 10 (Correction complète)

1. Tout d'abord, $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \simeq 0,97 \in [0,1]$ donc α existe.

   $$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= 2\cos^2(\alpha)-1 \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2-1 \\ &= \frac{1}{8}\left(8+2\sqrt{12}\right)-1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

   On en déduit que $2\alpha \equiv \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi]$ ou $2\alpha \equiv -\dfrac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

   Or, $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi$

   On en déduit que $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{12}}$.

2. On commence par calculer :

   $$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) &= 1-\cos^2(\alpha) \\ &= 1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 \\ &= 1-\frac{1}{16}\left(8+2\sqrt{12}\right) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

   Par ailleurs, comme $\alpha \in \left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on sait que $\sin(\alpha) > 0$.

   Donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

   Enfin, on se demande si $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. On transforme donc :

   $$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}-\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & 4(2-\sqrt{3}) = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 8-4\sqrt{3} = 8-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

   Cette dernière est vraie. Donc, par équivalences, la première ligne est aussi vraie.

   On on déduit que $\boxed{\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

3. On résout sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(x)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(x)=2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos(x)+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin(x)=\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin(x)=\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} x-\dfrac{\pi}{12}\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x-\dfrac{\pi}{12}\equiv-\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} x\equiv\dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x\equiv-\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

Exercice 11 (Correction incomplète)

Soient $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

1. • Ensemble de validité

$$\text{L'expression } \frac{1}{\tan(\theta)}-\frac{2}{\tan(2\theta)} \text{ a du sens } \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \text{ n'est pas congru à } \dfrac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi \\ \theta \text{ n'est pas congru à } \dfrac{\pi}{4} \text{ modulo } \dfrac{\pi}{2} \\ \theta \text{ n'est pas congru à } 0 \text{ modulo } \pi \\ \theta \text{ n'est pas congru à } 0 \text{ modulo } \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \theta \text{ n'est pas congru à } 0 \text{ modulo } \frac{\pi}{4}$$

• Simplification

En utilisant la définition de tan et les formules de duplication, on trouve : $\dfrac{1}{\tan(\theta)}-\dfrac{2}{\tan(2\theta)}=\cdots=\tan(\theta)$.

2. En utilisant la question précédente, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\tan(2^k)=\ \ldots\ =\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{\tan(2^k)}-\frac{2^{k+1}}{\tan(2^{k+1})}$$

On reconnait une somme télescopique, qui se simplifie en : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\tan(2^k)=\frac{1}{\tan(1)}-\frac{2^{n+1}}{\tan(2^{n+1})}$.