Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{7a^2 + 12a + 7}$

5.1 b) .... $\boxed{a^2 - a - 1}$

5.1 c)............... $\boxed{4a^2 - a - 3}$

5.1 d)................. $\boxed{-a^2 + 1}$

5.2 a).................... $\boxed{8 + 6\mathrm{i}}$

5.2 b).................... $\boxed{8 - 6\mathrm{i}}$

5.2 c)................. $\boxed{18 - 26\mathrm{i}}$

5.2 d)................. $\boxed{-9 - 46\mathrm{i}}$

5.3 a)................. $\boxed{39 - 18\mathrm{i}}$

5.3 b) .... $\boxed{2197}$

5.3 c) .... $\boxed{-4 + 43\mathrm{i}\sqrt{5}}$

5.3 d) .... $\boxed{1}$

5.4 a)......................... $\boxed{3}$

5.4 b) .... $\boxed{1}$

5.4 c)......................... $\boxed{1}$

5.5 a)................... $\boxed{a^2 + 2}$

5.5 b) .... $\boxed{a^3 + 3a}$

5.5 c)............. $\boxed{a^4 + 4a^2 + 2}$

5.6 a) .... $\boxed{\dfrac{q}{p^2}}$

5.6 b)....................... $\boxed{-1}$

5.6 c)......................... $\boxed{0}$

5.6 d) .... $\boxed{1}$

5.7 a) .... $\boxed{\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$

5.7 b) .... $\boxed{\left(\dfrac{aC^2}{2g}\right)^{\frac{1}{4}}}$

5.7 c) ....

$$\boxed{\sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)} \text{ ou } -\sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)}}$$

Corrigés

5.1 a) On développe $(a+2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2 - 1$.

5.1 b) De $a^3 = a^2 - 1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2 - a) = a^5 - a^4$ et donc $a^5 - a^6 = a^4$. De plus $a^4 = a(a^2 - 1)$, *etc.*

5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2-1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = -a^2 - a$ puis $a^{12} = (-a^2 - a)^2 = a^4 + 2a^3 + a^2$.

5.1 d) L'égalité $a^3 - a^2 + 1$ peut s'écrire $a(a - a^2) = 1$ ce qui montre que $a \neq 0$ et $\dfrac{1}{a} = a - a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2} = 1 - a$.

5.2 a) On développe : $(3+\mathrm{i})^2 = 9 + 6\mathrm{i} + \mathrm{i}^2$.

5.2 b) On développe : $(3-\mathrm{i})^2 = 9 + 6(-\mathrm{i}) + (-\mathrm{i})^2 = 9 - 6\mathrm{i} + \mathrm{i}^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3-\mathrm{i})^3 = (8-6\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 24 - 18\mathrm{i} - 8\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3-2\mathrm{i})^3 = 3^3 - 3\cdot 3^2(2\mathrm{i})^1 + 3\cdot 3^1(2\mathrm{i})^2 - (2\mathrm{i})^3$.

5.3 a) On développe : $24 - 30\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 15\mathrm{i}^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 2^2 - (3\mathrm{i})^2 = 4 + 9$, on obtient par associativité 13^3.

5.3 c) On développe : $(-4 + \mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -4^3 + 3\cdot 4^2(\mathrm{i}\sqrt{5}) - 3\cdot 4^1(\mathrm{i}\sqrt{5})^2 + (\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -64 + 48\mathrm{i}\sqrt{5} + 60 - 5\mathrm{i}\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\dfrac{1}{8} + 3\cdot i\dfrac{\sqrt{3}}{8} + 3\cdot\dfrac{3}{8} - i\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.4 a) De $a^5 = 1$, on déduit $a^7 = a^2$ et $a^6 = a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4 - 1 = 3$.

5.4 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, *etc.* et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

5.4 c) Ceci vaut a^S où $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{1234} k = \frac{1234 \times (1234+1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

5.5 a) On complète le carré : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{x}$.

5.5 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \dfrac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = a(a^2+2) + a$.

5.5 c) De même : $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = x^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 2 = (a^2+2)^2 - 2$.

5.6 a) $pq \times \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2q + p - 1}{p^2}$ or $p - 1 = -q$ donc $pq \times \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$

5.6 b) $\dfrac{pq}{(1-p)^2} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{p-1}{q} = -1$

5.6 c) $\dfrac{1}{pq} - \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{1}{1-p} = \dfrac{1}{pq} - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{pq} - \dfrac{q}{pq} - \dfrac{p}{pq} = \dfrac{1-p-q}{pq} = 0$

5.6 d) $p + q = 1$ donc $p^3 + 3pq + q^3 = p^3 + 3pq(p+q) + q^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$

5.7 a) $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} = \dfrac{k_2 + k_1}{k_1 k_2}$ donc $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ équivaut à $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

5.7 b) $\dfrac{2mg}{a}\rho - \dfrac{mC^2}{\rho^3} = 0 \iff \dfrac{2mg}{a}\rho = \dfrac{mC^2}{\rho^3} \iff \rho^4 = \dfrac{aC^2}{2g} \iff \rho = \sqrt[4]{\dfrac{aC^2}{2g}}$ (car $\rho > 0$)

5.7 c) On a nécessairement $R - \dfrac{d^2}{R} \geqslant 0$.

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{mgd^2}{2R} = \frac{mgR}{2} \iff v^2 + \frac{gd^2}{R} = gR \iff v^2 = g\left(R - \frac{d^2}{R}\right) \iff v = \sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)} \text{ ou } v = -\sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)}$$
