Fiche n° 17. Nombres complexes

Réponses

17.1 a) .... $\boxed{4+32\mathrm{i}}$

17.1 b) .... $\boxed{13-\mathrm{i}}$

17.1 c) .... $\boxed{7-24\mathrm{i}}$

17.1 d) .... $\boxed{5}$

17.1 e) .. $\boxed{-119+120\mathrm{i}}$

17.1 f) ..... $\boxed{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}}$

17.1 g) ..... $\boxed{\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}}$

17.1 h) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

17.2 a) .... $\boxed{12}$

17.2 b) .... $\boxed{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

17.2 c) .... $\boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

17.2 d) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

17.2 e) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

17.2 f) .... $\boxed{5\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$

17.2 g) ...... $\boxed{10\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}}$

17.2 h) $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

17.3 a) .... $\boxed{\{-i,i\}}$

17.3 b) ... $\boxed{\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}}$

17.3 c) $\boxed{\{1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i}\}}$

17.3 d) .... $\boxed{\{1-2\mathrm{i},-1+2\mathrm{i}\}}$

17.4 a) .... $\boxed{1}$

17.4 b) ... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

17.4 c) .. $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Corrigés

17.1 a) On développe : $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i}) = 10+2\mathrm{i}+30\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 10+32\mathrm{i}-6 = 4+32\mathrm{i}$.

17.1 b) On développe : $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 12+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}-\mathrm{i}^2 = 12-\mathrm{i}+1 = 13-\mathrm{i}$.

17.1 c) On développe : $(4-3\mathrm{i})^2 = 4^2-2\times4\times3\mathrm{i}+(3\mathrm{i})^2 = 16-24\mathrm{i}-9 = 7-24\mathrm{i}$

17.1 d) On développe : $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2-(2\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5$.

Ou bien : en posant $z=1-2\mathrm{i}$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2+2^2 = 5$.

17.1 e) On développe :

$(2-3\mathrm{i})^4 = \left((2-3\mathrm{i})^2\right)^2 = (4-2\times2\times3\mathrm{i}-9)^2 = (-5-12\mathrm{i})^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = 5^2+2\times5\times12\mathrm{i}-12^2 = -119+120\mathrm{i}$.
Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k(-3\mathrm{i})^{4-k}\\ &= (-3\mathrm{i})^4+4\times2\times(-3\mathrm{i})^3+6\times2^2\times(-3\mathrm{i})^2+4\times2^3\times(-3\mathrm{i})+2^4\\ &= 81+216i-216-96\mathrm{i}+16 = -119+120\mathrm{i}.\end{aligned}$$

17.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

17.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \dfrac{10-4\mathrm{i}-15\mathrm{i}-6}{5^2+2^2} = \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$.

17.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

17.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$).

17.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

17.2 c) On a $|\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{3}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

17.2 d) On a $|-2\mathrm{i}| = 2$ et $-\mathrm{i} = \overline{\mathrm{i}} = \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

17.2 e) On écrit que $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :
$-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

17.2 f) On calcule $|5-5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{2\times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit
$5-5\mathrm{i} = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

17.2 g) On calcule $|-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{25+75} = 10$ puis on écrit
$-5+5\mathrm{i}\sqrt{3} = 10\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

17.2 h) On écrit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
Ainsi, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (car $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$ et $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1$. Et $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{4}$.
On en déduit que l'écriture exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

17.3 a) $x^2 = -1 \iff x^2 = i^2 \iff (x-i)(x+i) = 0 \iff x = i$ ou $x = -i$

17.3 b) $x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0 \iff (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

17.3 c) $x^2 = 2\mathrm{i} \iff x^2 - 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 0 \iff x^2 - \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 0 \iff (x - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})(x + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = 0$

$\iff x = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $x = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \iff x = 1+i$ ou $x = -1-i$

17.3 d) On cherche $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(a+\mathrm{i}b)^2 = 3-4\mathrm{i}$ ce qui équivaut à : $a^2-b^2 = 3$, $2ab = -4$ et $a^2+b^2 = 5$
ce système a deux solutions $(a,b) = (1,-2)$ et $(a,b) = (-1,2)$

17.4 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

17.4 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})\mathrm{i} - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1} \\ &= \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1} = \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}}{4+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2})(1+\mathrm{i})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}, \end{aligned}$$

17.4 c) Enfin, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{2021} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi}$.
Comme $2021 = 4\times 505 + 1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.