Nombres complexes

Formes d'un nombre complexe

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, écrire le nombre complexe z sous forme algébrique :

1. $z = (2-5i)(3+i)$
2. $z = \dfrac{1}{1+i}$
3. $z = \dfrac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}$
4. $z = (1-i)^{22}$
5. $z = (\sqrt{3}-i)^9(-3+i)^2$
6. $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, écrire le nombre complexe sous forme exponentielle :

1. $z = \dfrac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}$
2. $z = -5\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}\right)$

Exercice 3

On pose $z_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z_1z_2z_3$
2. $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$
3. z_2^2
4. z_3^6

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $z_n = (\sqrt{3}+i)^n$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que z_n soit réel.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1| = |z-i|$.

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2z+1-i| > 1$.

Trigonométrie

Exercice 7

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :
$$E(x) = \cos(2x)\sin^3(x)$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser l'expression $E(x)$.
2. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$E(x) = -\dfrac{1}{8}\cos(x) + \dfrac{3}{8}\sin(3x) - \dfrac{1}{2}\sin((x)$.
(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$E(x) = -\dfrac{1}{8}\sin(5x) + \dfrac{3}{8}\sin(3x) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)$.

Exercice 8

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Linéariser les expressions suivantes :

1. $L_1 = \cos^4(x)\sin(x)$.
2. $L_2 = \sin^2(x)\cos^3(x)$.
3. $L_3 = \cos^4(x)\sin^3(x)$.

Exercice 9

Soient x un réel et n un entier naturel.
On pose $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$.
Exprimer C_n en fonction de x et de n.

Exercice 10

Soient x un réel et n un entier naturel.
On pose $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$.

1. Calculer le nombre complexe $C_n + iS_n$ en fonction de n et x.
2. En déduire les valeurs de C_n et S_n.
On pourra démontrer que $1 + e^{ix} = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{ix}{2}}$.

Exercice 11

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Exprimer $\sin(5a)$ en fonction de $\sin(a)$ et de ses différentes puissances.
On pourra utiliser la formule de de Moivre.
2. En déduire la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Nombres complexes de module 1

Exercice 12

Soit $u \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$|u| = 1 \Leftrightarrow \overline{u} = \frac{1}{u}$$

Exercice 13

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Calculer j^2 et j^3.
2. En déduire j^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Représenter graphiquement ce résultat.
3. Calculer $1 + j + j^2$.
4. Exprimer $\bar{j}$, $\dfrac{1}{j}$ et $\dfrac{1}{1+j}$ comme des polynômes en j.

Exercice 14

Soient z_1 et z_2 des nombres complexes de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$
On pose $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.
Montrer que Z est un réel.

Exercice 15

Soient a et b des complexes de module 1 avec $a \neq b$.
Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $z = \dfrac{x + ab\overline{x} - (a+b)}{a-b}$.
Montrer que z est un imaginaire pur.

Equations

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $z^2 + 2z - \sqrt{2} = 0$
3. $z^2 + 3\sqrt{3}z + 9 = 0$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.
2. $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$ et représenter graphiquement les solutions.

Suites

Exercice 19

Soit (u_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$$

Exprimer le terme général de (u_n) en fonction de n.

Exercice 20

Soit (u_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 + \sqrt{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

Exprimer le terme général de (u_n) en fonction de n.

Exercice 21

Déterminer l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

Exercice 22

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$