Nombres complexes - Correction

Formes d'un nombre complexe

Exercice 1 (Correction très rapide)

On trouve :

1. $11-13\,\mathrm{i}$
2. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$
3. $\dfrac{8}{5}+\dfrac{9}{5}\,\mathrm{i}$
4. $0+2048\,\mathrm{i}$ (le plus simple est de passer par la forme exponentielle)
5. $3072+4096\,\mathrm{i}$ (même chose)
6. $512-512\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ (même chose)

Exercice 2

Fait en classe.

Exercice 3 (Correction rapide)

On trouve :

1. $3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi}$
2. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\,\mathrm{e}^{\frac{4\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$
3. $9\,\mathrm{e}^{-\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{3}}$
4. $8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$

Exercice 4

Fait en classe.

Exercice 5 (Correction complète)

Soit M un point du plan et z le complexe associé.
On note A le point du plan qui représente le complexe $z_A = 1$ et B le point du plan qui représente le complexe $z_B = i$.
En interprétant les modules comme des distances, il vient :

$$\begin{aligned} |z-1| = |z-i| &\Leftrightarrow AM = BM \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [AB] \end{aligned}$$

Un point M est solution du problème si et seulement si M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ en notant $A(1,0)$ et $B(0,1)$.

On peut aussi résoudre ce problème par des calculs, en cherchant z sous forme algébrique.
On trouve alors : $|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow y = x$.
C'est bien la même condition, puisque la droite d'équation $y = x$ est la médiatrice de $[AB]$ (en conservant les notations pour A et B).

Exercice 6 (Correction complète)

Soit M un point du plan et z le complexe associé.
On transforme :

$$\begin{aligned} |2z+1-i| > 1 &\Leftrightarrow \left|2\left(z+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\right| > 1 \\ &\Leftrightarrow 2\left|z+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right| > 1 \\ &\Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \left|z-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\right| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On note Ω le point d'affixe $\omega = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$.

Un point M est solution du problème si et seulement si M est strictement à l'extérieur du disque de centre Ω d'affixe $\omega = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

Trigonométrie

Exercice 7 (Correction en partie complète)

1. On trouve $\mathsf{E}(x) = -\dfrac{1}{8}\sin(5x) + \dfrac{3}{8}\sin(3x) - \dfrac{1}{2}\sin(x)$.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \mathsf{E}(x) = \dots \\
\Leftrightarrow \quad & \sin(5x) = \cos(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = \cos(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} - 5x \equiv x[2\pi] \\ \text{ou} \\ \dfrac{\pi}{2} - 5x \equiv -x[2\pi] \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} \equiv 6x[2\pi] \\ \text{ou} \\ \dfrac{\pi}{2} \equiv 4x[2\pi] \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{l} x \equiv \dfrac{\pi}{12}[\dfrac{\pi}{3}] \\ \text{ou} \\ x \equiv \dfrac{\pi}{8}[\dfrac{\pi}{2}] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \mathsf{E}(x) = \dots \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\
\Leftrightarrow \quad & x \equiv \frac{2\pi}{3}[\pi]
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 8 (Correction rapide)

On trouve :

1. $\frac{1}{16}\Big(\sin(5x)+3\sin(3x)+2\sin(x)\Big)$

2. $-\frac{1}{16}\Big(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x)\Big)$

3. $-\frac{1}{64}\Big(\sin(7x)+\sin(5x)-3\sin(3x)-3\sin(x)\Big)$

Exercice 9 (Correction complète)

Le lien privilégié entre la trigonométrie et les complexes, c'est la formule d'Euler.

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{kix}+e^{-kix}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k \end{aligned}$$

On distingue alors les cas.
En effet, on peut appliquer la formule de sommation connue seulement si $e^{ix}\neq 1$ et si $e^{-ix}\neq 1$.

- Si $x\equiv 0\,[2\pi]$
  Dans ce cas, $e^{ix}=e^{-ix}=1$ et $C_n=n+1$
- Sinon
  Dans ce cas, $e^{ix}\neq 1$ et $e^{-ix}\neq 1$.

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}+\frac{1-e^{-i(n+1)x}}{1-e^{-ix}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(1-e^{i(n+1)x})\,(1-e^{-ix})+(1-e^{-i(n+1)x})\,(1-e^{ix})}{(1-e^{ix})(1-e^{-ix})} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{i(n+1)x}-e^{-ix}+e^{inx}+1-e^{-i(n+1)x}-e^{ix}+e^{-inx}}{1-e^{ix}-e^{-ix}+1} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2\Big(1-\cos(x)+\cos(nx)-\cos(\,(n+1)x)\Big)}{2\Big(1-\cos(x)\Big)} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1-\cos(x)+\cos(nx)-\cos(\,(n+1)x)}{1-\cos(x)} \end{aligned}$$

Remarque
Au départ, on sait que C_n est un nombre réel. On poursuit donc les calculs jusqu'à ce qu'il soit à nouveau apparent que C_n est un réel. Les nombres complexes ne peuvent être qu'une étape de calcul.

Exercice 10 (Correction complète)

Soient x un réel et n un entier naturel.

1. On calcule :

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \; + i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\cos(kx) + i \sin(kx) \Big) \qquad \text{(linéarité)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kix} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(e^{ix} \Big)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(e^{ix} \Big)^k 1^{n-k} \\
&= \Big(1 + e^{ix} \Big)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{C_n + iS_n = \Big(1 + e^{ix} \Big)^n}$$

2. Puisque $C_n = \mathrm{Re}\Big[\Big(1 + e^{ix} \Big)^n \Big]$ et $S_n = \mathrm{Im}\Big[\Big(1 + e^{ix} \Big)^n \Big]$, il faut déterminer la forme algébrique de $\Big(1 + e^{ix} \Big)^n$.
Or :

$$\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{ix}{2}} &= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] \\
&= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + i\, 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 1 + \cos(x) + i \sin(x) \qquad \text{(formules trigonométriques)} \\
&= 1 + e^{ix}
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\Big(1 + e^{ix} \Big)^n &= \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{ix}{2}} \right)^n \\
&= 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\,\frac{nx}{2}} \\
&= 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \, \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right] \\
&= 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \, \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \, 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \, \sin\left(\frac{nx}{2}\right)
\end{aligned}$$

Puisque deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires, on en déduit que :

$$\boxed{C_n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \, \cos\left(\frac{nx}{2}\right)} \text{ et } \boxed{S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \, \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

Exercice 11 (Correction rapide)

1. D'une part, $\sin(5a) = \mathrm{Im}\Big(e^{5ia} \Big)$.
D'autre part, on peut mettre sous forme algébrique :

$$\begin{aligned}
e^{5ia} &= \Big(e^{ia} \Big)^5 \\
&= \Big(\cos(a) + i \sin(a) \Big)^5 \\
&= \ldots \qquad \text{(formule du binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

Par identification des formes algébriques, on trouve :

$$\boxed{\sin(5a) = 5\sin(a) - 20\sin^3(a) + 16\sin^5(a)}$$

2. Voir TD de trigonométrie à partir de là.

Nombres complexes de module 1

Exercice 12

Fait en classe.

Exercice 13 (Correction rapide)

1. $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ et $j^3 = 1$
2. Si $n = 3k$, $j^n = 1$; si $n = 3k+1$, $j^n = j$ et si $n = 3k+2$, $j^n = j^2$
3. $1 + j + j^2 = 0$
4. $\bar{j} = j^2$; $\dfrac{1}{j} = j^2$; $\dfrac{1}{1+j} = -j$

Exercice 14 (Correction complète)

L'exercice repose sur :

- Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$: $\omega \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \omega = \overline{\omega}$
- Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$: $|\omega| = 1 \ \Leftrightarrow\ \overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$

On calcule :

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \overline{\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}} \\
&= \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2}} \\
&= \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}} \\
&= \frac{\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}}{\dfrac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}} \\
&= \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \\
&= Z
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\boxed{Z \text{ est un réel}}$.

Exercice 15 (Correction complète)

L'exercice repose sur :

- Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$: ω est un imaginaire pur si et seulement si $\omega = -\overline{\omega}$
- Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$: $|\omega| = 1 \ \Leftrightarrow\ \overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$

On calcule :

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{\frac{x + ab\overline{x} - (a+b)}{a-b}} \\
&= \frac{\overline{x} + \overline{a}\,\overline{b}\,x - (\overline{a} + \overline{b})}{\overline{a} - \overline{b}} \\
&= \frac{\overline{x} + \frac{1}{a}\,\frac{1}{b}\,x - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \\
&= \frac{\dfrac{ab\overline{x} + x - (a+b)}{ab}}{\dfrac{b-a}{ab}} \\
&= \frac{x + ab\overline{x} - (a+b)}{b-a} \\
&= -z
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\boxed{z \text{ est un imaginaire pur}}$.

Equations

Exercice 16 (Correction rapide)

On trouve :

1. On trouve j et $\bar{j}$ (le " j " de l'exercice 13)
2. $\Delta > 0$ et on trouve $-1-\sqrt{1+\sqrt{2}}$ et $-1+\sqrt{1+\sqrt{2}}$
3. $\Delta < 0$ et on trouve $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\,i$ et $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}\,i$

Exercice 17 (Correction rapide)

Dans les deux cas, on résout en posant $\omega = z^2$.

1. On trouve quatre solutions : $2i$, $-2i$, 1 et -1.
2. On trouve $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $-e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $-e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 18 (Correction en partie complète)

Soit $z \in \mathbb{C}$.
On pose $\omega = z^4$ et on résout :

$$\begin{aligned}
& z^8+z^4+1=0 \\
\Leftrightarrow\ & \omega^2+\omega+1=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{lcl} \omega & = & j \\ \text{ou} & & \\ \omega & = & \bar{j} \end{array}\right. \qquad \text{(d'après l'exercice 13)} \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{lcl} z^4 & = & e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ \text{ou} & & \\ z^4 & = & e^{-\frac{2i\pi}{3}} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- <u>On résout la première</u>
  Pour cela, on passe sous forme exponentielle en écrivant $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& z^4 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow\ & r^4e^{4i\theta} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{lcl} r^4 & = & 1 \\ 4\theta & \equiv & \frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{lcl} r & = & 1 \\ \theta & \equiv & \frac{\pi}{6}\,[\frac{\pi}{2}] \end{array}\right. \qquad \text{(car } r>0)
\end{aligned}$$

  Il y a bien une infinité d'angles θ solutions de ce système.
  Mais il y a seulement 4 nombres complexes qui correspondent : $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{\frac{4i\pi}{6}}$, $e^{\frac{7i\pi}{6}}$ et $e^{\frac{10i\pi}{6}}$.
- <u>On résout la deuxième</u>
  De même.
  Il y a 4 nombres complexes solutions : $e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{\frac{11i\pi}{6}}$, $e^{\frac{2i\pi}{6}}$, $e^{\frac{5i\pi}{6}}$ et $e^{\frac{8i\pi}{6}}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{6}}, e^{i\frac{4\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{8\pi}{6}}, e^{i\frac{10\pi}{6}}, e^{i\frac{11\pi}{6}} \right\}$$

+ représentation graphique

Suites

Exercice 19 (Correction rapide)

On trouve $u_n = \cos\left(n\,\dfrac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}^n$.

Exercice 20 (Correction rapide)

On trouve $u_n = \left[\cos\left(n\,\dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(n\,\dfrac{\pi}{3}\right)\right] 2^n$.

Exercice 21 (Correction rapide)

C'est l'ensemble des suites de terme général $u_n = A\cos\left(n\,\dfrac{2\pi}{3}\right) + B\sin\left(n\dfrac{2\pi}{3}\right)$ où A et B sont des réels quelconques.

Exercice 22 (Correction rapide)

C'est exactement la même preuve que dans $\mathbb{R}$.