Systèmes linéaires

Algorithme du pivot de Gauss

Exercice 1

Résoudre les systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{R}^2$

1. $\left\{\begin{array}{l} x + y = 7 \\ x - y = 9 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x + 3y = 13 \\ 2x + 4y = 20 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} 3x - 4y = 5 \\ -6x + 8y = -10 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{l} 2x - 8y = 1 \\ 3x - 12y = 3 \end{array}\right.$

Exercice 2

Résoudre les systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{K}^3$

1. $\left\{\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} 3x + 8y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 10y + 4z = 5 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y + z = 3 \end{array}\right.$

Exercice 3

Résoudre les systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{R}^4$:

1. $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ 3x + 2y + 2z - t = 0 \\ 2x - y + z + 2t = -2 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \end{array}\right.$

Systèmes à paramètres

Exercice 4

Soit $m \in \mathbb{R}$.
Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$ en discutant suivant le paramètre m :

$$\left\{\begin{array}{l} mx - 2y = 0 \\ x - (m+1)y = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 5

Résoudre les systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{R}^3$, en discutant suivant la valeur du paramètre m :

1. $\left\{\begin{array}{l} x - my + z = 2 \\ x + (m+1)z = 3 \\ x + my + 3z = 4 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x + y + mz = 3 \\ x + 2y + (m+1)z = 2 \\ 2x + y + (m-1)z = 1 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} mx + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ (m+1)x - y + z = 0 \end{array}\right.$

Exercice 6

Quelle valeur donner au paramètre réel a pour que le système suivant n'admette pas de solution ?

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + ay - 4z = 2 \end{array}\right.$$

Exercice 7

Déterminer a, b et c pour que le système suivant admette une et une seule solution :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = a \\ x - 2y = b \\ 3x + 2y = c \end{array}\right.$$

Applications et approfondissement

Exercice 8

On considère l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x + 4 \ (E)$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer qu'il existe une unique fonction affine solution de cette équation.

Exercice 9

On considère l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ 5y''(x) + 6y'(x) + y(x) = 2 \ (E)$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que pour tous réels C_1 et C_2, la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-0.2x} + 2$ est une solution de (E).
2. Trouver une fonction g qui soit solution de (E) et qui vérifie $g(0) = 5$ et $g'(0) = 1$.

Exercice 10

Est-il possible de trouver deux réels α et β tels que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, on ait :

$$\int_1^2 P(x)\,dx = \alpha P(1) + \beta P(2)\,?$$

Exercice 11

Montrer qu'il existe des constantes α, β et γ telles que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \alpha P(1) + \beta P(2) + \gamma P(3)$$

Exercice 12

On définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+4y, 2x+3y) \end{array}$$

Montrer que, pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (X,Y)$.

Exercice 13

On définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y) \end{array}$$

Donner l'ensemble des triplets $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels l'équation $f(x,y,z) = (X,Y,Z)$ a une unique solution (x,y,z).