

DS n°1 - Correction**Exercice 1**

1. On fournit un contre-exemple.

Pour $k = 0$, on a bien $k \in \mathbb{N}$. Pourtant, $k - 1 = -1 \notin \mathbb{N}$.

Donc l'assertion est fausse.

2. Soit $s \in \mathbb{R}$.

On pose $t = (-s + 1)$.

D'une part, on a bien : $t \in \mathbb{R}$. D'autre part, $s + t = s + (-s + 1) = 1 > 0$.

Donc l'assertion est vraie.

3. On raisonne par l'absurde.

On suppose qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s + t > 0$.

Ainsi, en particulier, pour $t = -s - 1$, qui est bien un réel, on a :

$$s + t = s + (-s - 1) = -1 \leq 0.$$

Ceci est en contradiction avec la supposition initiale.

Donc l'assertion est fausse.

4. Soit $m \in \mathbb{Z}$.

On pose $p = m^2 + 1$. Vérifions qu'il convient.

D'une part, p est alors un entier. De plus, p est positif ou nul comme somme de positifs ou nuls. Donc $p \in \mathbb{N}$.

D'autre part, $p - 1 = (m^2 + 1) - 1 = m^2$.

Donc p ainsi définit convient.

Donc l'assertion est vraie.

Exercice 2

1. On résout dans $\mathbb{R}$.

- On commence par étudier le trinôme.

$\Delta = 36 - 4 \times 5 = 16$ donc le trinôme a deux racines, qui sont $x_1 = \frac{-6-4}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-6+4}{2} = -1$.

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-5	-1	$+\infty$	
x^2+6x+5	+	0	-	0	+

On peut alors distinguer les cas :

- Si $x \in]-\infty, -5]$

$$\begin{aligned} |x^2 + 6x + 5| &\leq x + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 &\leq x + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 5x &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x(x + 5) &\leq 0 \end{aligned}$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	-5
x	-	0
x + 5	-	0
x(x + 5)	+	0

Dans ce cas, il y a donc une seule solution qui est -5 .

- Si $x \in]-5, -1[$

$$\begin{aligned} |x^2 + 6x + 5| &\leq x + 5 \\ \Leftrightarrow -x^2 - 6x - 5 &\leq x + 5 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x^2 + 7x + 10 \end{aligned}$$

Pour ce trinôme, $\Delta = 49 - 4 \times 10 = 9$.

Ce trinôme a donc deux racines qui sont $x_1 = \frac{-7-3}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-7+3}{2} = -2$.

On dresse un tableau de signes :

x	-5	-2	-1	
$x^2+7x+10$	0	-	0	+

Dans ce cas, l'ensemble partiel de solutions est donc $[-2, -1[$.

- Si $x \in [-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} |x^2 + 6x + 5| &\leq x + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 &\leq x + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 5x &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x(x + 5) &\leq 0 \end{aligned}$$

On dresse un tableau de signes :

x	-1	0	$+\infty$
x	-	0	+
x + 5	+	+	+
x(x + 5)	-	0	+

Dans ce cas, l'ensemble partiel des solutions est donc $[-1, 0]$

- Conclusion

L'ensemble des solutions de (E_1) est : $\{-5\} \cup [-2, 0]$.

2. On résout dans $\mathbb{R}$.

$$x^2 + 2m(x + 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m - 3 = 0$$

Pour ce trinôme, $\Delta = 4m^2 - 4(2m - 3) = 4(m^2 - 2m + 3)$.

On veut connaître le signe de Δ ; on s'intéresse donc au nouveau trinôme $m^2 - 2m + 3$ pour lequel le discriminant est $\Delta_m = 4 - 4 \times 3 = -8$.

$\Delta_m < 0$ donc le trinôme $m^2 - 2m + 3$ est strictement positif, d'où $\Delta > 0$.

Donc l'équation (E_2) a deux solutions, qui sont :

$$x_1 = \frac{-2m - \sqrt{4(m^2 - 2m + 3)}}{2} = \frac{-2m - 2\sqrt{m^2 - 2m + 3}}{2} = -m - \sqrt{m^2 - 2m + 3}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-2m + \sqrt{4(m^2 - 2m + 3)}}{2} = -m + \sqrt{m^2 - 2m + 3}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{ -m - \sqrt{m^2 - 2m + 3}, -m + \sqrt{m^2 - 2m + 3} \right\}$.

Exercice 3

1. (a) Soit
- $k \in \mathbb{N}^*$
- .

$$(k+1)! - k! = (k+1) \times k! - k! = (k+1-1)k! = k \times k!.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)! - k! = k \times k!$.
--

- (b) Soit
- $n \in \mathbb{N}^*$
- .

$$\begin{aligned} W_n &= \sum_{k=1}^n k \times k! \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1)! - k! \\ &= (n+1)! - 1 \quad (\text{somme télescopique}) \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n = (n+1)! - 1$
--

2. On raisonne par récurrence.

Initialisation : pour $n = 1$

$$\text{D'une part, } S_1 = \sum_{k=1}^1 (k-1)^2 k! = (1-1)^2 \times 0! = 0.$$

$$\text{D'autre part, } 2 + (1-2) \times (1+1)! = 2 - 2 = 0.$$

L'égalité est donc vraie pour $n = 1$.HéréditéOn suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = 2 + (n-2) \times (n+1)!$.

On calcule alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^2 k! \\ &= S_n + (n+1-1)^2 (n+1)! \\ &= 2 + (n-2) \times (n+1)! + n^2 (n+1)! \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= 2 + (n-2+n^2)(n+1)! \\ &= 2 + (n-1)(n+2)(n+1)! \quad (\text{racines évidentes}) \\ &= 2 + (n-1) \times (n+2)! \end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait ; la formule est vraie au rang $n+1$.ConclusionPar principe de récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2 + (n-2) \times (n+1)!$
--

.

3. (a) Soit
- $n \in \mathbb{N}^*$
- .

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (k-1)^2 k! \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1) k! \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) k! - 2k \times k! \\ &= T_n - 2W_n \quad (\text{par linéarité}) \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = T_n - 2W_n$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On calcule à l'aide des questions précédentes :

$$T_n = S_n + 2W_n$$

$$= 2 + (n-2) \times (n+1)! + 2((n+1)! - 1) \quad (\text{questions 1b et 2})$$

$$= 2 + (n-2) \times (n+1)! + 2(n+1)! - 2$$

$$= n \times (n+1)!$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $T_n = t_n \times (n+1)!$ en posant $t_n = n$.

Exercice 4

- Terme général de (u_n)

(u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 sans second membre.

→ Equation caractéristique

On commence par résoudre : $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$

Cette équation a donc deux solutions qui sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

→ Terme général

Ainsi, il existe λ, μ des réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

→ Constantes

Pour déterminer les constantes λ et μ , on résout :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \lambda - \mu &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ 2\lambda &= 1 \quad L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

- Calcul de la somme

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

Exercice 5

1. Par construction des figures, à chaque étape, la longueur des segments est divisé par 3.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l_{n+1} = \frac{l_n}{3}$.

(l_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Par ailleurs, son premier terme $l_0 = 1$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = \frac{1}{3^n}$.

2. Par construction des figures, à chaque étape de construction, un segment est remplacé par quatre autres.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_{n+1} = 4N_n$.

(N_n) est donc une suite géométrique de raison 4. Par ailleurs, son premier terme $N_0 = 3$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, N_n = 3 \times 4^n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P_n = N_n \times l_n = 3 \times 4^n \times \frac{1}{3^n} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\frac{4}{3} > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty.$$

Le flocon de von Koch a un périmètre infini.

4. (a) On note H le pied de la hauteur issue de A. L'aire de ABC est alors :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABH} + \mathcal{A}_{ACH}$$

$$= \frac{AH \times BH}{2} + \frac{AH \times CH}{2}$$

$$= AH \times BH \quad (\text{car H est le milieu de [BC] et donc } BH = CH)$$

$$= \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \times \frac{c}{2} \quad (\text{d'après le théorème de Pythagore appliqué dans AHB rectangle en H})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} c \times \frac{c}{2} \quad (\text{car } c > 0)$$

$$\text{L'aire d'un triangle équilatéral de côté } c \text{ est } \frac{\sqrt{3}}{4} c^2.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par construction, l'aire de la figure à l'étape $n+1$ est l'aire de la figure à l'étape n augmentée des aires des triangles que l'on rajoute.

A l'étape $n+1$, on ajoute N_n triangles.

Chacun de ces triangles est équilatéral, et son côté est l_{n+1} ; son aire est donc $\frac{\sqrt{3}}{4} l_{n+1}^2$.

Ainsi :

$$A_{n+1} = A_n + N_n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (l_{n+1})^2$$

$$= A_n + 3 \times 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2$$

$$= A_n + 3 \times 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9^{n+1}}$$

$$= A_n + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$= A_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A_n - A_0 &= A_n - A_{n-1} + A_{n-1} - A_{n-2} + \cdots + A_1 - A_0 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \cdots + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^0 \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n - A_0$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{\sqrt{3}}{12}$ et de raison $\frac{4}{9}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A_n &= A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{9}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] \\ &= \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{20} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{20} \left[8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \frac{\sqrt{3}}{20} \left[8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

(e) $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

Le flocon de von Koch a une aire finie qui vaut $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.