Semaine 6 - Lundi 4 novembre au vendredi 8 novembre

Chap 6 - Nombres complexes

I/ Nombres complexes : forme algébrique

1. Description
   - Définitions : i, nombre complexe, $\mathbb{C}$, forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire
   - Proposition : unicité de la forme algébrique
   - Règles de calcul : partie réelle et partie imaginaire d'une somme et d'un produit
2. Conjugué
   - Définition de $\overline{z}$
   - Proposition : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$, $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$
   - Règles de calcul : $\overline{z+\omega} = \overline{z} + \overline{\omega}$, $\overline{z\omega} = \overline{z}\,\overline{\omega}$ et, si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
3. Module
   - Définition : $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$
   - Lien avec l'inverse : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
   - Propriétés : si $z \in \mathbb{R}$, alors $|z|$ (valeur absolue de z) est égal à $|z|$ (module de z), $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ et $|z| = |\overline{z}|$
   - Règles de calcul : $|z\,\omega| = |z|\,|\omega|$ et, si $z \neq 0$, alors $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
   - Inégalité triangulaire et deuxième inégalité triangulaire
4. Interprétation géométrique
   - Représentation des nombres complexes : affixe d'un point ou d'un vecteur et interprétation de la somme, du conjugué et du module

II/ Nombres complexes : forme exponentielle et forme trigonométrique

1. Nombres complexes de module 1
   - $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists\,\theta \in \mathbb{R},\ z = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$ et notation $\cos(\theta) + i\,\sin(\theta) = e^{i\theta}$
   - Valeurs à connaître : $e^{i\times 0}$, $e^{i\pi/6}$, $e^{i\pi/4}$, $e^{i\pi/3}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{i\pi}$
   - Règles de calcul : $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
   - Formules d'Euler : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
   - Formule de de Moivre : $\Big(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)\Big)^n = \cos(n\theta) + i\,\sin(n\theta)$
2. Forme exponentielle et forme trigonométrique d'un complexe non nul
   - Définitions : forme exponentielle, forme trigonométrique
   - Cas d'égalité

III/ Applications

1. Linéarisation
   - Méthode pour linéariser une expression de la forme $\cos^p(\theta)\,\sin^q(\theta)$
   - Cas particuliers $\cos^2(\theta)$, $\sin^2(\theta)$ et $\cos(\theta)\,\sin(\theta)$
2. Equations de la forme $x^2 = a$, $a \in \mathbb{C}$
   - Si $a = re^{i\theta}$ (avec $r > 0$), alors :

     $$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2} \text{ ou } x = \sqrt{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$$
3. Equations du second degré
   - Cas $\Delta < 0$
4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sans second membre
   - Cas $\Delta < 0$

Chap 7 - Systèmes linéaires

I/ Généralités

- Définitions : équation linéaire à p inconnues, système linéaire de n équations et p inconnues
- Définition : second membre, système linéaire homogène
- Définition : système compatible, système incompatible

II/ Résolution

1. Systèmes échelonnés
    - Définition : système échelonné
    - Ensemble des solutions d'un système échelonné : cas avec une unique solution, cas avec une infinité de solutions
    - Définitions : pivots, inconnues principales, inconnues secondaires
2. Opérations élémentaires
    - Définitions : opération élémentaire, permutation de deux lignes, multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, ajout à une ligne d'un multiple d'une autre
    - Définition : systèmes linéaires équivalents
    - Proposition : deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions
3. Algorithme du pivot de Gauss
    - Description de l'algorithme du pivot de Gauss
    - Exemples d'application : cas avec une unique solution, cas avec une infinité de solution, cas avec aucune solution

III/ Compléments

1. Ensemble des solutions
    - Théorème (admis) : tout système linéaire admet zéro, une seule ou une infinité de solutions
    - Définition : système de Cramer
    - Proposition : cas des systèmes homogènes ; l'ensemble des solutions contient le neutre, est stable par somme et est stable par produit par un scalaire
    - Corollaire : un système homogène ne peut pas avoir zéro solution
2. Rang
    - Proposition et définition : rang d'un système linéaire
3. Interprétation géométrique
    - On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $(a',b') \neq (0,0)$
    - Résoudre (S) revient à déterminer l'ensemble des points d'intersection de deux droites
    - Interprétation selon le nombre de solutions du système

Informatique

1. Bases de la programmation en Python : fonctions, if, for, while.
2. Listes (définir une liste, manipuler ses éléments, la parcourir, la copier)

Questions de cours

1. *Avec preuve.* Linéariser $\sin^2(\theta)\cos^4(\theta)$ $(\theta \in \mathbb{R})$.
2. *Sans preuve.* Résolution des équations du second degré.
3. *Sans preuve.* Fonctions Python suivantes :

```python
'''Recherche d'un element dans une liste.'''
def recherche (L,x) :
    for e in L :
        if e == x :
            return True
    return False

'''Recherche du maximum dans une liste.'''
def maximum (L) :
    M = L[0]
    for e in L :
        if e > M :
            M = e
    return M

'''Moyenne des elements d'une liste.'''
def moyenne (L) :
    S = 0
    for e in L :
        S += e
    return S / len(L)
```

4. *Sans preuve.* Définition des opérations élémentaires sur un système linéaire et algorithme du pivot de Gauss.
5. *Avec preuve.* Ensemble des solutions d'un système homogène (contient le neutre, stable par somme, stable par produit par un scalaire).