Systèmes linéaires - Correction

Algorithme du pivot de Gausse

Exercice 1 (Correction complète)

1. On résout dans $\mathbb{R}^2$.
$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 7 \\ x & - & y & = & 9 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccl} x & + & y & = & 7 & \\ & & 2y & = & -2 & L_1 - L_2 \end{array}\right.$$
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{(8,-1)\}\text{ .}}$

2. On résout dans $\mathbb{R}^2$.
$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 3y & = & 13 \\ 2x & + & 4y & = & 20 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccl} x & + & 3y & = & 13 & \\ & & 2y & = & 6 & 2L_1 - L_2 \end{array}\right.$$
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{(4,3)\}\text{ .}}$

3. On résout dans $\mathbb{R}^2$.
$$\left\{\begin{array}{ccccc} 3x & - & 4y & = & 5 \\ -6x & + & 8y & = & -10 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccl} 3x & - & 4y & = & 5 & \\ & & 0 & = & 0 & L_2 + 2L_1 \end{array}\right.$$
Si l'on exprime y en fonction de x, on obtient :
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left\{ \left(x\,,\,\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}\right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}\text{ .}}$$
Si l'on exprime x en fonction de y, on obtient :
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left\{ \left(\frac{4}{3}y + \frac{5}{3}\,,\,y\right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}\text{ .}}$$

4. On résout dans $\mathbb{R}^2$.
$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & 8y & = & 1 \\ 3x & - & 12y & = & 3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccl} 2x & - & 8y & = & 1 & \\ & & 0 & = & 3 & 2L_2 - 3L_1 \end{array}\right.$$
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \emptyset\text{ .}}$

Exercice 2

Fait en classe.

Exercice 3 (Correction rapide)

1. Selon les décisions prises lors de l'exécution de l'algorithme du pivot de Gausse, on peut trouver :
$$\left\{ (-\frac{11}{4} + \frac{3}{2}y\,,\,y\,,\,4-3y\,,\,-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}y) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \text{ ou } \left\{ (-2+3t\,,\,\frac{1}{2}+2t\,,\,\frac{5}{2}-6t\,,\,t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$
2. $\emptyset$

Systèmes à paramètres

Exercice 4 (Correction complète)

Dans cet exercice, on fait attention au statut des variables m, x et y.
$\rightarrow$ m est un paramètre. Il est quelconque mais fixé. Il nous force à distinguer des cas.
$\rightarrow$ x et y sont les inconnues. On les cherche. On les exprime en fonction de m.

Par ailleurs, on garde en tête que dans l'opération élémentaire de multiplication ($L_i \leftarrow \lambda L_i$), il **faut** que λ soit non nul.

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccc} mx & - & 2y & = & 0 \\ x & - & (m+1)\,y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccl} x & - & (m+1)\,y & = & 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ mx & - & 2y & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccl} x & - & (m+1)\,y & = & 0 & \\ & & (-2+m+m^2)y & = & 0 & L_2 - mL_1 \end{array}\right.$$

On résout $m^2 + m - 2 = 0$; les solutions sont 1 et -2.

- Si $m = 1$

  $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 2y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

  $\boxed{\text{Si } m = 1\text{, l'ensemble des solutions est } \left\{ (2y, y) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}.}$

- Si $m = -2$

  $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

  $\boxed{\text{Si } m = -2\text{, l'ensemble des solutions est } \left\{ (-y, y) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}.}$

- Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$

  $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

  $\boxed{\text{Si } m \in \mathbb{R}\backslash\{1, -2\}\text{, l'ensemble des solutions est } \left\{ (0, 0) \right\}.}$

Exercice 5 (Correction en partie complète)

1. Si $m \neq 0$ et $m \neq 1$: $\left\{ (3, \frac{1}{m}, 0) \right\}$.
   Si $m = 0$: $\emptyset$.
   Si $m = 1$: $\left\{ (3-2z, 1-z, z) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$
   ATTENTION : dans le cas $m \neq 0$ et $m \neq 1$, il y a bien *une seule* solution au système.

2. Soit $m \in \mathbb{R}^3$. On résout dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 3 \\ x & + & 2y & + & (m+1)z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & (m-1)z & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccl} x & + & y & + & mz & = & 3 & \\ & & y & + & z & = & -1 & L_2 - L_1 \\ & - & y & - & (m+1)z & = & -5 & L_3 - 2L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccl} x & + & y & + & mz & = & 3 & \\ & & y & + & z & = & -1 & \\ & & & - & mz & = & -6 & L_2 + L_3 \end{array} \right.$$

- Si $m = 0$
  La dernière ligne du système devient $0 = -6$
  $\boxed{\text{Si } m = 0, \text{ le système n'a pas de solution.}}$
- Si $m \neq 0$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllllll} x & = & 3 - y - mz & = & 3 + \dfrac{m+6}{m} - 6 & = & \dfrac{-2m+6}{m} \\ y & = & -1 - z & = & -1 - \dfrac{6}{m} & = & -\dfrac{m+6}{m} \\ z & = & \dfrac{6}{m} & & & & \end{array} \right.$$

  $\boxed{\text{Si } m \neq 0, \text{ l'ensemble des solutions est } \left\{ \left(\dfrac{6-2m}{m}, -\dfrac{m+6}{m}, \dfrac{6}{m} \right) \right\}.}$

  ATTENTION : dans le cas $m \neq 0$, il y a bien *une seule* solution au système.

3. Si $m = \frac{3}{2}$: $\emptyset$
   Si $m \neq \frac{3}{2}$: $\left\{ (\frac{4}{2m-3}, \frac{2m-1}{2m-3}, \frac{-2m-5}{2m-3}) \right\}$.
   ATTENTION : dans le cas $m \neq \frac{3}{2}$, il y a bien *une seule* solution au système.

Exercice 6 (Correction complète)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + ay - 4z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 & \\ 7y - 11z = -10 & L_2 + 3L_1 \\ (a-10)y + 11z = 7 & L_3 - 5L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 & \\ 7y - 11z = -10 & \\ (a-3)y = -3 & L_2 + L_3 \end{cases}$$

- Si $a = 3$, alors la dernière ligne est impossible et le système n'a pas de solution.
- Si $a \neq 3$, alors la dernière ligne permet d'isoler y et on peut alors déterminer z puis x ; le système a une unique solution.

$\boxed{\text{Le système n'a pas de solution si et seulement si } a = 3.}$

Exercice 7 (Correction complète)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$

On résout :

$$\begin{cases} 2x + 3y = a \\ x - 2y = b \\ 3x + 2y = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = a & \\ -7y = 2b - a & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ -5y = 2c - 3a & L_3 \leftarrow 2l_3 - 3L_1 \end{cases}$$

On voit donc que :
Ce système a une unique solution

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{7}(2b - a) = -\dfrac{1}{5}(2c - 3a)$

$\Leftrightarrow 5(2b - a) = 7(2c - 3a)$

$\Leftrightarrow 10b - 5a = 14c - 21a$

$\Leftrightarrow 10b + 16a - 14c = 0$

$\Leftrightarrow 5b + 8a - 7c = 0$

$\boxed{\text{Le système a une et une seule solution si et seulement si } 5b + 8a - 7c = 0 \text{ .}}$

Applications et approfondissement

Exercice 8 (Correction complète)

- Analyse
  On suppose qu'il existe une fonction affine f solution de cette équation.
  Ainsi, il existe deux coefficients a et b réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
  On traduit alors :

$$\begin{aligned}
& f \text{ est solution de } (E) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}\,,\ f''(x) + 2f'(x) + f(x) = x + 4 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}\,,\ 0 + 2(a) + (ax + b) = x + 4 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}\,,\ ax + (2a + b) = x + 4 \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & a & = & 1 \\ 2a & + & b & = & 4 \end{array} \right. \qquad \text{(par identification)} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

- Synthèse
  On note f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = x + 2$.
  f est une fonction affine.
  De plus, les calculs de l'analyse ayant été menés par équivalences, on sait que f est solution de (E).
- Conclusion
  La synthèse prouve l'existence d'une fonction affine solution de (E).
  Le fait qu'on ait trouvé une seule fonction à la fin de l'analyse prouve l'unicité de cette fonction.
  $\boxed{\text{Il existe une unique fonction affine solution de l'équation } (E).}$

Exercice 9 (Correction complète)

1. Soient C_1 et C_2 deux réels.
   On note f la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-0.2x} + 2$.
   Ainsi :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f'(x) = -\,C_1 e^{-x} - 0.2 C_2 e^{-0.2x}$$
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f''(x) = +\,C_1 e^{-x} + 0.04 C_2 e^{-0.2x}$$
   Et :
   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad 5f''(x) + 6f'(x) + f(x) &= 5\Big(C_1 e^{-x} + 0.04 C_2 e^{-0.2x}\Big) + 6\Big(-\,C_1 e^{-x} - 0.2 C_2 e^{-0.2x}\Big) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-0.2x} + 2 \\ &= \Big(5C_1 - 6C_1 + C_1\Big) e^{-x} + \Big(5 \times 0.04 C_2 - 6 \times 0.2 C_2 + C_2\Big) e^{-0.2x} + 2 \\ &= 2\end{aligned}$$
   Ceci prouve que f est solution de (E).

Pour tout réels C_1 et C_2, la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-0.2x} + 2$ est une solution de (E) .

2. • Phase de recherche
   On cherche g définie par une expression de la forme $g(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-0.2x} + 2$ avec C_1 et C_2 des constantes à déterminer.
   On commence par rappeler que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\,C_1 e^{-x} - 0.2 C_2 e^{-0.2x}$
   Pour déterminer C_1 et C_2, on résout :
   $$\left\{\begin{array}{l} g(0) = 5 \\ g'(0) = 1 \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} C_1 & + & C_2 & + & 2 & = & 5 \\ -C_1 & - & 0.2C_2 & & & = & 1 \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} C_1 & + & C_2 & = & 3 \\ -C_1 & - & 0.2C_2 & = & 1 \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} C_1 & + & C_2 & = & 3 & \\ & & 0.8C_2 & = & 4 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrl} C_1 & = & -2 & \\ C_2 & = & 5 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array}\right.$$
   • Conclusion

La fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2e^{-x} + 5e^{-0.2x} + 2$ est solution de (E) et vérifie $g(0) = 5$ et $g'(0) = 1$.

Exercice 10

Fait en classe.

Exercice 11 (Correction complète, ou presque)

- Analyse

  On suppose qu'il existe trois réels α, β et γ tels que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \alpha P(1) + \beta P(2) + \gamma P3)$$

  Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Il existe donc des réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = ax^2 + bx + c$.

  D'une part :

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(x)\,dx &= \int_0^1 ax^2 + bx + c\,dx \\ &= \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + c\,x\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\right) - 0 \\ &= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\end{aligned}$$

  D'autre part :

$$\begin{aligned}\alpha P(1) + \beta P(2) + \gamma P(3) &= \alpha\Big(a + b + c\Big) + \beta\Big(4a + 2b + c\Big) + \gamma\Big(9a + 3b + c\Big) \\ &= \Big(\alpha + 4\beta + 9\gamma\Big)a + \Big(\alpha + 2\beta + 3\gamma\Big)b + \Big(\alpha + \beta + \gamma\Big)\end{aligned}$$

  On propose ici une rédaction sans le "par identification", pour montrer que c'est possible.

  L'égalité étant vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2, elle est en particulier vraie pour le polynôme P défini par : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = x^2$.

  Pour ce polynôme, $a = 1$ et $b = c = 0$ et on obtient : $\dfrac{1}{3} = \alpha + 4\beta + 9\gamma$.

  De même, pour $P(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$ et $c = 0$ et on obtient : $\dfrac{1}{2} = \alpha + 2\beta + 3\gamma$.

  Enfin, pour $P(x) = 1$, $a = b = 0$ et $c = 1$ et on obtient : $1 = \alpha + \beta + \gamma$.

  On résout maintenant :

$$\begin{cases}\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = \dfrac{1}{2} \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = \dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \ldots$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = \dfrac{23}{12} \\ \beta = -\dfrac{4}{3} \\ \gamma = \dfrac{5}{12}\end{cases}$$

- Synthèse
  Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
  Il existe des réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$.
  D'après les calculs de l'analyse, $\int_0^1 P(x)\,dx = \alpha P(1) + \beta P(2) + \gamma P(3)$

  Ceci n'est pas un bluff. Les calculs ont été faits dans l'analyse. On serait en train de les recopier *à l'identique.*
  Ce n'est pas la peine de perdre notre temps à ça.
- Conclusion

  Il existe des constantes α, β et γ telles que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 :

$$\boxed{\int_0^1 P(x)\,dx = \alpha P(1) + \beta P(2) + \gamma P3)}$$

Exercice 12 (Correction complète)

Fait en classe.

Exercice 13 (Correction complète)

ATTENTION : dans cet exercice, il faut être conscient que X, Y et Z sont des paramètres et x, y et z sont les inconnues.

- Calculs
  Soit $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque.
  Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On résout :
  $f(x, y, z) = (X, Y, Z)$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 6x & - & 4y & - & 4z & = & X \\ 5x & - & 3y & - & 4z & = & Y \\ x & - & y & & & = & Z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 6x & - & 4y & - & 4z & = & X \\ x & - & y & & & = & X - Y \quad L_2 \leftarrow -L_2 + L_1 \\ x & - & y & & & = & Z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 6x & - & 4y & - & 4z & = & X \\ x & - & y & & & = & X - Y \\ & & & & 0 & = & Z - X + Y \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right.$$

- Interprétation
  → Si $Z - X + Y = 0$, alors le système a une infinité de solutions.
  → Si $Z - X + Y \neq 0$, alors le système n'a pas de solution.

- Conclusion
  Il n'existe aucun triplet (X, Y, Z) pour lequel l'équation $f(x, y, z) = (X, Y, Z)$ ait une unique solution.
  L'ensemble demandé est l'ensemble vide.