Devoir Surveillé n°2 - Partie 2 - Mathématiques

Samedi 19 octobre 2024 - Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est interdit.
Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.
Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Exercice 1

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère le système (S_m) d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et défini par :

$$(S_m) \ : \ \begin{cases} -(5+m)\,x & + & 3\,y & = & 0 \\ 6\,x & - & (2+m)\,y & = & 0 \end{cases}$$

Résoudre le système (S_m) en fonction des valeurs du paramètre m.

Exercice 2

On considère les deux réels suivants :

$$\mu = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \nu = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

Le but de cet exercice est de simplifier les expressions de μ et de ν.

1. (a) Calculer $\mu\nu$ et $\mu^3 + \nu^3$.
   (b) Développer $(\mu+\nu)^3$ et simplifier à l'aide de la question précédente.
2. On pose $\lambda = \mu + \nu$ et, pour tout réel x, $P(x) = x^3 + 3x - 14$.
   (a) Déduire des questions précédentes que $P(\lambda) = 0$.
   (b) Vérifier que 2 est une solution de l'équation $P(x) = 0$ puis trouver trois réels a, b et c tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = (x-2)\,(ax^2 + bx + c)$$
   (c) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue le réel x et en déduire la valeur de λ .
3. Pour tout réel x, on pose $Q(x) = (x-\mu)(x-\nu)$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier l'expression de $Q(x)$ à l'aide des résultats précédents.
   (b) En déduire que μ et ν sont solutions de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Conclure.

Exercice 3

On pose :

$$z = \frac{2+i}{2-i}$$

Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre complexe z n'est pas une racine de l'unité, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ z^n \neq 1$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde.
Ainsi, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$, c'est-à-dire tel que $(2+i)^n = (2-i)^n$.
Enfin, on pose :

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}\,(2i)^{n-k}$$

1. On considère l'ensemble $L = \left\{ a + ib \in \mathbb{C} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$.
   Autrement dit, $L = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{Z} \right\}$.
   (a) Soient $z_1, z_2 \in L$. Montrer que $z_1 + z_2 \in L$ et $z_1\,z_2 \in L$.
   (b) En déduire que $S \in L$ puis que $|S|^2 \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $S = \dfrac{(2i)^n}{i-2}$ puis calculer $|S|^2$.
3. Conclure.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

1. (a) Résoudre l'équation $z^5 = 1$ d'inconnue le nombre complexe z.
   On cherchera z sous forme exponentielle.

   Dans la suite de l'exercice, ces solutions sont appelées racines 5-ièmes de l'unité.

   (b) Ecrire les racines 5-ièmes de l'unité non réelles en fonction de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
2. (a) Montrer qu'il existe une unique 5-liste $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$ telle que :

   $$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ z^5 - 1 = (z-1)\,(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4)$$

   Pour la suite de l'exercice, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on notera $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$.

   (b) Vérifier que :

   $$\forall z \in \mathbb{C}^*\,,\ \frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1$$

   (c) Résoudre l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   (d) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   On écrira les solutions de cette équation sous forme algébrique.
3. Conclure.