Applications

Généralités

Exercice 1

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.
Montrer que : $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$

Exercice 2

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.
Montrer que :

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
2. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
3. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

Image directe

Exercice 3

Dans chacune des questions suivantes, donner sans justifier $f(I)$.

1. $f : x \mapsto \cos(x)$ et $I = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$.
2. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $I = [0, \sqrt{13}]$.
3. $f : x \mapsto x^2$ et $I = [-1, 2]$.

Exercice 4

Donner sans justifier les images directes suivantes :

1. $\sin\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.
2. $\sin([\pi, 2\pi[)$.
3. $\cos\left(\left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right]\right)$.
4. $\cos(]0, \pi[)$.

Exercice 5

Dans chacune des questions suivantes, donner sans justifier $f(A)$.

1. $f : x \mapsto x^2$ et $A = [-5, -2]$.
2. $f : x \mapsto x^2$ et $A =]-3, 2]$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $A = [-2, 0[\cup]0, 2]$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par f.

Injections, surjections, bijections

Exercice 7

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(2x) \end{array}$$
2. $$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^x \end{array}$$

Exercice 8

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $$\begin{array}{rccl} a : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & 2x \end{array}$$
2. $$\begin{array}{rccl} b : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x \end{array}$$
3. $$\begin{array}{rccl} c : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x \end{array}$$

Exercice 9

On définit f par :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ & x & \mapsto & \ln(1 + e^x) \end{array}$$

1. Vérifier que f est correctement définie.
2. Démontrer que f est bijective et expliciter f^{-1}.

Exercice 10

On note $f : x \mapsto -\ln\left(1 + \sqrt{x}\right)$ où x désigne un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Quel ensemble d'arrivée F faut-il choisir pour f pour que f soit bijective de $\mathcal{D}$ dans F ?
3. On considère dans cette question que $f : \mathcal{D} \to F$. Déterminer la réciproque f^{-1} de f.

Exercice 11

On définit l'application f par :

$$\begin{array}{rccl} f : & [1, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{|x-1|} \end{array}$$

f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 12

On définit l'application f par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-2}{x-1} \end{array}$$

1. Vérifier que f est correctement définie.
2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 13

On définit l'application f par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 14

Soit $a \in]-1, 1[$.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et on définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \to & \mathbb{U} \\ z & \mapsto & \dfrac{1-az}{z-a} \end{array}$$

1. Vérifier que f est correctement définie.
2. Démontrer que f est une bijection et préciser f^{-1} .

Exercice 15

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et on définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U}\setminus\{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+ix}{1-ix} \end{array}$$

1. Vérifier que f est correctement définie.
2. Démontrer que f est une bijection et préciser f^{-1} .

Composition

Exercice 16

On considère les applications :
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \ln(x)$ (où x désigne un réel)

1. Donner les ensembles de définition de f et de g.
2. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression de $f \circ g$.
3. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression de $g \circ f$.

Approfondissement

Exercice 17

Soient $f : E \to F$ et $f : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que, si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
3. Donner des exemples de fonctions f et g telles que $g \circ f$ soit injective mais g n'est pas injective.

Exercice 18

Soient $f : E \to F$ et $f : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que, si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
2. Montrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Donner des exemples de fonctions f et g telles que $g \circ f$ soit surjective mais f n'est pas surjective.