Fiche n° 7. Exponentielle et Logarithme

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{4\ln(2)}$

7.1 b) .... $\boxed{9\ln(2)}$

7.1 c) .... $\boxed{-3\ln(2)}$

7.1 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$

7.1 e) .... $\boxed{3\ln(2)}$

7.1 f) .... $\boxed{2\ln(2)+2\ln(3)}$

7.2 a) .... $\boxed{-\ln(3)-2\ln(2)}$

7.2 b) .... $\boxed{2\ln(3)-2\ln(2)}$

7.2 c) .... $\boxed{\ln(3)+11\ln(2)}$

7.2 d) .... $\boxed{3\ln(5)+2\ln(2)}$

7.2 e) .... $\boxed{-2\ln(5)+4\ln(2)}$

7.2 f) .... $\boxed{2\ln(5)-2\ln(2)}$

7.3 .... $\boxed{-2\ln(2)-2\ln(5)}$

7.4 a) .... $\boxed{8}$

7.4 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

7.4 c) .... $\boxed{\frac{1}{3}}$

7.4 d) .... $\boxed{\frac{1}{9}}$

7.4 e) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

7.4 f) .... $\boxed{\frac{3}{2}}$

7.5 a) .... $\boxed{-2}$

7.5 b) .... $\boxed{\frac{1}{\ln(2)}}$

7.5 c) .... $\boxed{-17}$

7.5 d) .... $\boxed{1}$

7.6 a) .... impaire

7.6 b) .... impaire

7.6 c) .... impaire

7.6 d) .... impaire

7.7 a) .... $\boxed{1}$

7.7 b) .... $\boxed{\text{-1}}$

7.8 a) .... $\boxed{x+\ln 2}$

7.8 b) .... $\boxed{\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}}$

7.8 c) .... $\boxed{\ln|x-1|}$

7.8 d) .... $\boxed{-\frac{1}{1+x}}$

7.9 a) .... $\boxed{x \geqslant \frac{\ln(12)+5}{3}}$

7.9 b) .... $\boxed{x \in [0,1]}$

7.9 c) .... $\boxed{x \geqslant \frac{2}{e}}$

7.9 d) .... $\boxed{x \geqslant -\frac{1}{12}}$

Corrigés

7.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln(16) = 4\ln(2)$.

7.1 c) On a $0{,}125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0{,}125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

7.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln(72) - 2\ln(3) = (3\ln(2) + 2\ln(3)) - 2\ln(3) = 3\ln(2)$.

7.2 c) On a $0{,}875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln(21) + 2\ln(14) - 3\ln(0{,}875) &= (\ln(3) + \ln(7)) + 2(\ln(2) + \ln(7)) - 3(\ln(7) - \ln(8)) \\ &= \ln(3) + 2\ln(3) + 3 \times 3\ln(2) = 3\ln(3) + 11\ln(2).\end{aligned}$$

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln(1) - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \cdots + (\ln(98) - \ln(99)) + (\ln(99) - \ln(100))$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{99}(\ln(k) - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln(k) - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln(k) - \sum_{j=2}^{100} \ln(j) \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln(1) - \ln(100) = -2(\ln(2) + \ln(5))$.

7.5 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln(\ln(2))} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln(2))} = (\ln(2))^{-1} = \dfrac{1}{\ln(2)}$.

7.6 a) f_1 est définie sur $]-2022, +2022[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in\,]-2022, +2022[, \quad f(-x) = \ln\left(\frac{2022-x}{2022+x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{2022+x}{2022-x}}\right) = -\ln\left(\frac{2022+x}{2022-x}\right) = -f_1(x).$$

7.6 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) \\ &= \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{-x^2+(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -f_2(x). \end{aligned}$$