Fiche n° 21. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

21.1 a) .... $\boxed{\{-5,1\}}$

21.1 b) .... $\boxed{\{\frac{1}{2}\}}$

21.2 a) .... $\boxed{\{3\}}$

21.2 b) .... $\boxed{\{\frac{9}{16}\}}$

21.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

21.3 b) .... $\boxed{1}$

21.3 c) .... $\boxed{-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}}$

21.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}}$

21.4 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

21.4 b) .... $\boxed{\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}}$

21.4 c) .... $\boxed{1-\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

21.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

21.5 a) .... $\boxed{]2,4[}$

21.5 b) .... $\boxed{\{\frac{1}{2}\}}$

21.6 a) ... $\boxed{x\mapsto \ln(2)\times 2^x+2x}$

21.6 b). $\boxed{x\mapsto \dfrac{15^x\ln(3/5)+3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}}$

21.6 c)...... $\boxed{x\mapsto (\ln(x)+1)x^x}$

21.6 d).......... $\boxed{x\mapsto -\dfrac{1}{1+x^2}}$

21.6 e)............... $\boxed{x\mapsto 0}$

21.6 f).......... $\boxed{x\mapsto \arctan(x)}$

Corrigés

21.1 a) $|x+2|=3 \iff x+2=3$ ou $x+2=-3 \iff x=1$ ou $x=-5$

21.1 b) Géométriquement la seule solution est l'abscisse du milieu des points d'abscisse -2 et 3.

$|x+2|=|x-3| \iff (x+2)^2=(x-3)^2 \iff 4x+4=-6x+9 \iff 10x=5 \iff x=\dfrac{1}{2}$

21.2 a) Si $x\geqslant -1$ est solution alors $x+1=4$ ou encore $x=3$ et 3 est bien une solution.

21.2 b) L'étude de $x\longmapsto \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ montre qu'il y a une et une seule solution.

de plus $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=2 \Longrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2=4 \Longrightarrow 2x+1+2\sqrt{x(x+1)}=4 \Longrightarrow 2\sqrt{x(x+1)}=-2x+3 \Longrightarrow$ $4x(x+1)=4x^2-12x+9 \Longrightarrow x=\dfrac{9}{16}$

21.3 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x=\dfrac{9^x}{2} \Leftrightarrow \ln(3^x)=\ln\left(\dfrac{9^x}{2}\right) \Leftrightarrow x\ln(3)=2x\ln(3)-\ln(2) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

21.3 b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x=2\times 2^x \Leftrightarrow 2x\ln(2)=(x+1)\ln(2) \Leftrightarrow 2x=x+1 \Leftrightarrow x=1$.

21.3 c) Soit $x\in\mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x=3.4^x \Leftrightarrow x\ln(2)=\ln(3)+2x\ln(2) \Leftrightarrow x=-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

21.3 d) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$10^{2x}=4\times 5^x\times 9^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \ln(10^{2x})=\ln(4\times 5^x\times 9^{\frac{x}{2}}) \Leftrightarrow 2x\ln(10)=\ln(4)+x\ln(5)+\frac{x}{2}\ln(9)$$
$$\Leftrightarrow x\left(2\ln(5)+2\ln(2)-\ln(5)-\frac{2\ln(3)}{2}\right)=\ln(4) \Leftrightarrow x=\frac{\ln(4)}{2\ln(2)+\ln(5)-\ln(3)}=\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}.$$

21.4 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons $X=2^x$. Alors $2^x+4^x=4 \Leftrightarrow X+X^2-4=0$. Cette équation a pour discriminant $1+16=17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ est positive, donc $2^x+4^x=4 \Leftrightarrow 2^x=\dfrac{\sqrt{17}-1}{2} \Leftrightarrow$

$x\ln(2) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

21.4 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

21.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.
Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\dfrac{3}{2}$ et -1. La seule solution positive est $\dfrac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

21.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.
Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{-1 \pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

21.5 a) Géométriquement : ce sont les abscisses des points sur le disque ouvert de centre 3 et de rayon 1.

$|x-3| < 1 \iff -1 < x - 3 < 1 \iff 2 < x < 4$

21.5 b) $|2x+1| \geqslant 2 \iff 2x + 1 \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad 2x + 1 \geqslant 2 \iff x \leqslant -\dfrac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x \geqslant \dfrac{1}{2}$

21.6 a) On n'oublie pas que $2^x = e^{x\ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

21.6 c) On écrit que $x^x = e^{x\ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}$.

21.6 d) Fonction dérivable sur $]-\infty;.0[$ et sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

21.6 e) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.