Applications

Généralités

Exercice 1 (Correction complète)

On procède par équivalences :

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in E\,,\ \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in E\ \ x \in A \Leftrightarrow x \in B \\ \Leftrightarrow\ & A = B \end{aligned}$$

Exercice 2 (Question 1 complète)

Tout d'abord, dans chacune des questions, on constate que les fonctions qui nous intéressent ont toutes le même ensemble de départ (à savoir E) et le même ensemble d'arrivée (à savoir $\{0, 1\}$).

1. Soit $x \in E$. On procède en distinguant les cas :
   - Si $x \in A \cap B$
     D'une part, $\mathbb{1}_{A\cap B} = 1$.
     D'autre part, puisque $x \in A \cap B$, $x \in A$ et donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$. De même $\mathbb{1}_B(x) = 1$. Ainsi, $\Big(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\Big)(x) = 1$.
     On constate donc que, dans ce cas, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \Big(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\Big)(x) = 1$.
   - Si $x \notin A \cap B$, c'est-à-dire si $x \notin A$ ou $x \notin B$
     Dans tous les cas, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$
     $\rightarrow$ Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et donc $\Big(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\Big)(x) = 0$
     $\rightarrow$ Si $x \notin B$, alors $\mathbb{1}_B(x) = 0$ et donc $\Big(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\Big)(x) = 0$
     Dans tous les cas, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \Big(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\Big)(x) = 0$

   Finalement, pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \Big(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\Big)(x)$.

   Ceci prouve que $\boxed{\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B}$
2. On procède de même, en distinguant les cas selon que $x \in 1$ ou $x \notin A$.
3. On procède de même, en distinguant les cas selon que $x \in A\backslash B$, $x \in B\backslash A$, $x \in A \cap B$ ou $x \notin A \cup B$.

Image directe

Exercice 3

(Fait en classe)

Exercice 4 (Correction complète)

1. $[0, 1]$
2. $[-1, 0]$
3. $[-1, 0]$
4. $]-1, 1[$

Exercice 5 (Correction complète)

1. $[4, 25]$
2. $[0, 9[$
3. $]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$

Exercice 6 (Correction complète)

- Phase de conjecture
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
  Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $0 \leqslant f(x) < 1$.
  On conjecture donc que l'image de $\mathbb{R}$ par f est $[0, 1[$, c'est-à-dire que $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$.
- Preuve de la conjecture
  Il faut démontrer que $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$; on procède par double inclusion.

  → Démontrons que $f(\mathbb{R}) \subset [0, 1[$
  Soit $y \in f(\mathbb{R})$. On peut ainsi écrire $y = f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
  Or, d'après les calculs de la phase de conjecture, on sait que $0 \leqslant f(x) < 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant y < 1$.
  Ceci prouve l'inclusion.

  → Démontrons que $[0, 1[\subset f(\mathbb{R})$
  Soit $y \in [0, 1[$.
  Comme $y \in [0, 1[$, $\lfloor y \rfloor = 0$ et donc $f(y) = y - \lfloor y \rfloor = y$.
  Ceci prouve que y a au moins un antécédent par la fonction f : lui-même.
  Et donc $y \in f(\mathbb{R})$ et l'inclusion est prouvée.

- Conclusion
  $\boxed{\text{L'image de } \mathbb{R} \text{ par } f \text{ est } [0, 1[.}$
- Complément
  Il me semble particulièrement éclairant dans cet exercice d'aller regarder l'allure de la représentation graphique de f.

Injections, surjections, bijections

Exercice 7 (Très rapide)

1. Pas injective, pas surjective, pas bijective.
2. Injective, pas surjective, pas bijective.

Exercice 8 (Très rapide)

Question	Injective	Surjective	Bijective
1	oui	non	non
2	oui	oui	oui
3	oui	non	non

Exercice 9

(Fait en classe)

Exercice 10 (Question 1 complète ; le reste rapide)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 & \text{(pour la racine)} \\ 1+\sqrt{x} > 0 & \text{(pour le logarithme)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x} > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geqslant 0$$

$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est } [0,+\infty[.}$

2. Les étapes du raisonnement sont :
   - Conjecture
     En étudiant la fonction f (variations, limites), il semble qu'il faille prendre l'ensemble $F =]-\infty, 0]$.
   - Preuve de la conjecture
     Soit $y \in F$. On résout dans $\mathcal{D}$:
     $y = f(x) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \sqrt{x} = e^{-y} - 1 \Leftrightarrow x = \left(e^{-y} - 1\right)^2$
     ATTENTION
     La dernière équivalence est subtile. Elle est valable car, d'une part, $x \geqslant 0$ et, d'autre part $y \leqslant 0$ donc $e^{-y} - 1 \geqslant 0$.

     On a bien trouvé une et une seule solution, et cette solution appartient à $\mathcal{D}$. Ceci prouve la conjecture.

3. Obtenue à la question précédente :

$$f^{-1} \; : \; \begin{array}{rcl}]-\infty, 0] & \to & [0,+\infty[\\ y & \mapsto & \left(e^{-y} - 1\right)^2 \end{array}$$

Exercice 11 (Correction complète)

- Phase initiale
  Ce n'est pas demandé, mais on vérifie rapidement de tête que la fonction est correctement définie.
  - $\rightarrow$ Ensemble de départ
    Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|x-1| \geqslant 0$ donc $\sqrt{|x-1|}$ existe.
  - $\rightarrow$ Ensemble d'arrivée
    Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ donc on a bien $f(x) \geqslant 0$.

- Simplification de f
  Soit $x \in [1, +\infty[$.
  Ainsi, $x \geqslant 1$, donc $x - 1 \geqslant 0$ donc $|x-1| = x - 1$.
  Donc, en fait, $f(x) = \sqrt{x-1}$.
- Etude de la bijectivité
  Soit $y \in [0, +\infty[$ fixé.
  On cherche $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x)$.
  $$\begin{aligned} & y = f(x) \\ \Leftrightarrow \quad & y = \sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 = x - 1 \qquad (x - 1 \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0) \\ \Leftrightarrow \quad & x = y^2 + 1 \end{aligned}$$
  Ainsi, l'équation a une unique solution x qui appartient bien à $[1, +\infty[$.
  Donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et donc $\boxed{f \text{ est injective et surjective}}$.

Exercice 12 (Correction complète)

1. - Ensemble de départ
     Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
     Comme $x \neq 1$, $x-1 \neq 0$ et on peut calculer $\dfrac{x-2}{x-1}$.
     On peut donc prendre $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ comme ensemble de départ.
   - Ensemble d'arrivée
     Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Il faut démontrer que : $\dfrac{x-2}{x-1} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
     Comme $\dfrac{x-2}{x-1}$ est un nombre réel, il reste juste à démontrer que $\dfrac{x-2}{x-1} = 1$ est impossible.
     On résout donc :
     $$\begin{array}{ll} & \dfrac{x-2}{x-1} = 1 \\ \Leftrightarrow & x-2 = x-1 \\ \Leftrightarrow & -2 = -1 \end{array}$$
     Ceci est impossible, donc $\dfrac{x-2}{x-1} = 1$ est impossible ; c'est ce qu'on voulait.
     On peut donc prendre $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ comme ensemble d'arrivée.

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est correctement définie .}}$
2. On commence par l'étude de la surjectivité.
   Soit $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. On résout :
   $$\begin{array}{lll} & y = f(x) & \\ \Leftrightarrow & y = \dfrac{x-2}{x-1} & \\ \Leftrightarrow & y(x-1) = x-2 & \\ \Leftrightarrow & x(y-1) = y-2 & \\ \Leftrightarrow & x = \dfrac{y-2}{y-1} & \text{(possible car } y \neq 1) \end{array}$$
   On a trouvé un unique antécédent x ; il reste à vérifier que x appartient à l'ensemble de départ de f, c'est-à-dire que $x = 1$ est impossible.
   Or, $x = 1$ est impossible par les mêmes calculs que ceux de la partie "Ensemble d'arrivée" de la question 1.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est bijective, donc injective, donc surjective .}}$

Exercice 13

(Sera fait en classe.)

Exercice 14 (Correction presque complète)

1. • Ensemble de départ
   Soit $z \in \mathbb{U}$.
   Les seuls éléments de $\mathbb{U}$ qui sont aussi des réels sont -1 et 1.
   Or, $a \neq 1$ et $a \neq -1$.
   Donc $z \neq a$, c'est-à-dire $z - a \neq 0$ et $f(z)$ existe.
   On peut donc prendre $\mathbb{U}$ comme ensemble de départ.
   • Ensemble d'arrivée
   Soit $z \in \mathbb{U}$. Il faut montrer que $\dfrac{1-az}{z-a} \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire que $\left|\dfrac{1-az}{z-a}\right| = 1$.
   Pour cela, on calcule :
$$\begin{aligned}
\left|\frac{1-az}{z-a}\right|^2 &= \frac{1-az}{z-a} \times \overline{\left(\frac{1-az}{z-a}\right)} \\
&= \frac{1-az}{z-a} \times \frac{1-a\bar{z}}{\bar{z}-a} \\
&= \frac{1-az-a\bar{z}+a^2 z\bar{z}}{z\bar{z}-az-a\bar{z}+a^2} \\
&= \frac{1-az-a\bar{z}+a^2}{1-az-a\bar{z}+a^2} \qquad (\text{car } z \in \mathbb{U} \text{ donc } z\bar{z} = 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$
   Donc $\left|\dfrac{1-az}{z-a}\right| = 1$
   Ceci prouve que l'on peut prendre $\mathbb{U}$ comme ensemble d'arrivée.
   • Conclusion
   $\boxed{f \text{ est correctement définie.}}$
2. Soit $\omega \in \mathbb{U}$. On résout dans $\mathbb{U}$:
   $\omega = f(z)$

   $\Leftrightarrow \quad \ldots$

   $\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{1+a\omega}{a+\omega}$ (possibla car $\omega \in \mathbb{U}$ et raisonnement similaire à l'ens. de départ)

   Ainsi, on a trouvé une seule solution à l'équation. Reste à vérifier que z ainsi trouvé appartient à $\mathbb{U}$.
   Pour cela, on calcule $|z|^2$. Par des calculs similaires à ceux de l'ensemble d'arrivée, on trouve $|z|^2 = 1$ et donc $|z| = 1$; c'est ce qu'on voulait.

   $\boxed{f \text{ est bijective.}}$

   La réciproque de f est :
$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \to & \mathbb{U} \\ \omega & \mapsto & \dfrac{1+a\omega}{a+\omega} \end{array}$$

Exercice 15 (Correction quasi complète)

1. - Ensemble de départ

     Soit $x \in \mathbb{R}$.

     $$\frac{1+ix}{1-ix} \text{ existe}$$

     $$\Leftrightarrow \quad 1 - ix \neq 0$$

     $$\Leftrightarrow \quad x \neq -i$$

     Ceci est vrai (puisque x est réel).

     Donc l'ensemble de départ est possible.
   - Ensemble d'arrivée

     Soit $x \in \mathbb{R}$. Il faut vérifier que $f(x) \in \mathbb{U}\backslash\{-1\}$.

     → On calcule $|f(x)|^2$ avec la formule utilisant le conjugué :

     $$|f(x)|^2 = \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right|^2 = \frac{1+ix}{1-ix} \times \frac{1-ix}{1+ix} = 1$$

     Ceci prouve que $|f(x)| = 1$ et donc que $f(x) \in \mathbb{U}$.

     - On résout ensuite $f(x) = -1$:

       $f(x) = -1 \Leftrightarrow 1 + ix = -(1 - ix) \Leftrightarrow 1 = -1$

       Ceci est faux, donc l'équation n'a pas de solution, donc $f(x) = -1$ est impossible.

     Ces deux points prouvent que $f(x) \in \mathbb{U}\backslash\{-1\}$.
   - Conclusion

     $\boxed{f \text{ est correctement définie.}}$
2. Soit $y \in \mathbb{U}\backslash\{-1\}$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

   $$y = f(x)$$

   $$\Leftrightarrow \quad \dots$$

   $$\Leftrightarrow \quad x = i\,\frac{1-y}{1+y}$$

   On a bien trouvé une unique solution, mais il faut vérifier que le x trouvé est réel. Pour cela, on utilise le critère avec le conjugué.

   $\overline{x} = \dots = x$

   (Dans ces calculs, on utilise le fait que, puisque y est de module 1, $\overline{y} = \frac{1}{y}$).

   Ces calculs prouvent que $\boxed{f \text{ est bijective}}$.

   De plus :

   $$\boxed{\begin{array}{rccl} f^{-1} : & \mathbb{U}\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & i\,\dfrac{1-y}{1+y} \end{array}}$$

Composition

Exercice 16 (Correction rapide)

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$ et celui de g est $]0,+\infty[$.
2. $f \circ g$ est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et, pour tout x appartenant à cet ensemble : $f \circ g(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$.
3. $g \circ f$ est définie sur $]0,+\infty[$ et, pour tout x appartenant à cet ensemble, $g \circ f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Approfondissement

Exercice 17 (Correction très rapide)

1. Ceci est une question de cours.
2. On utilise la méthode avec les x, x'.
3. On peut prendre :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Exercice 18 (Correction très rapide)

1. Ceci est une question de cours.
2. On utilise la méthode où on prend $z \in G$ et on lui trouve un antécédent par g.
3. On peut prendre :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$