

Fonctions réelles usuelles

Outils d'étude**Exercice 1**

Démontrer qu'une fonction réelle est bornée si et seulement si sa valeur absolue est majorée.

Exercice 2

1. Soit f une fonction paire définie sur \mathbb{R} .
 f est-elle injective ?
2. Soit f une fonction périodique définie sur \mathbb{R} .
 f est-elle injective ?

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .
Montrer que, si f et g sont croissantes sur I , alors $f + g$ aussi.

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions définies un intervalle I .
Dans tout l'exercice, on suppose que f et g sont croissantes sur I .

1. Dans cette question, on suppose que f et g sont positives sur I .
Montrer que $f \times g$ est croissante sur I .
2. Dans cette question, on suppose que f et g sont négatives sur I .
Que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$ dans ce cas ?
3. Dans cette question, on ne fait aucune hypothèse sur le signe de f et g .
Que peut-on dire de la monotonie de $f \times g$ dans ce cas ?

Exercice 5

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} .
Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow I$ deux fonctions réciproques l'une de l'autre.
Démontrer que leurs représentations graphiques, notées respectivement C_f et C_g , sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

exp, ln et fonctions associées**Exercice 6**

Soient a , b et c trois réels strictement positifs.
Parmi les relations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $(a^b)^c = a^{bc}$
2. $a^b a^c = a^{bc}$
3. $a^{2b} = (a^b)^2$
4. $(ab)^c = a^{c/2} b^{c/2}$
5. $(a^b)^c = a^{(b^c)}$
6. $(a^b)^c = (a^c)^b$

Exercice 7

On note $a = x$ et $b = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$ où x désigne un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition de l'expression b .
2. Simplifier a^b .

Exercice 8

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $5^{x^3} = 3^{x^5}$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Exercice 9

Pour tous $a, b \in]0, +\infty[$ avec $b \neq 1$, on définit :

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\log_5(x + 5) = 3 + \log_5(x)$
2. $\log_x(x + 6) = 2$

Exercice 10

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 5x - 14) \geq \ln(2x^2 - 10x + 8)$
2. $\ln(5x + 20) > \ln(3x - 2)$
3. $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leq \ln(2)$

Exercice 11

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Etude de fonctions

Exercice 12

Pour chacune des fonctions suivantes, tracer l'allure de sa représentation graphique *sans utiliser de calculatrice*.

On n'attend pas de justification.

1. $x \mapsto \left| (x-2)(x+4) \right|$
2. $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$
3. $x \mapsto \ln|x|$
4. $x \mapsto e^{|x|}$

Exercice 13

Soit $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ où x désigne un réel.

1. Donner l'ensemble de définition D de f .
2. Etudier la parité de f .

Exercice 14

Soit $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ où x désigne un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Etudier la parité de f .
3. Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
4. Etudier la limite de f en $+\infty$.
5. Tracer l'allure de la courbe de f .

Exercice 15

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$ où x désigne un réel.

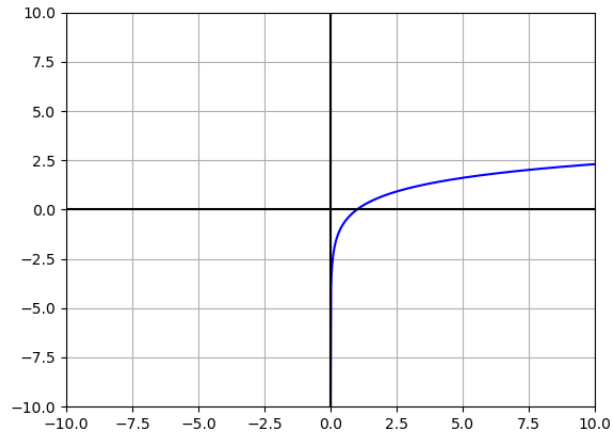
1. Donner l'ensemble de définition D de f .
2. Démontrer que la courbe C de f admet un centre de symétrie.
3. Tracer l'allure de C .

Graphiques

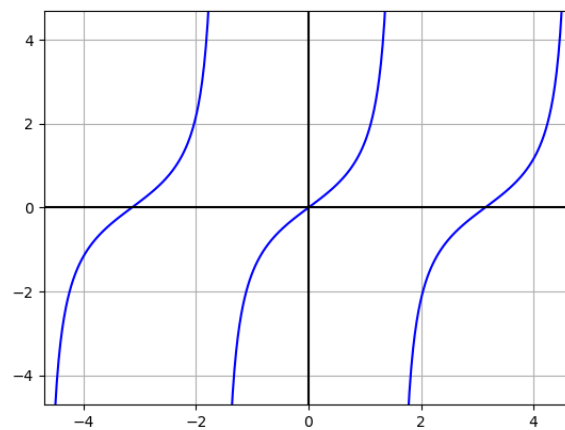
Exercice 16

Reconnaître les fonctions associées aux graphes ci-dessous et compléter avec les éléments importants manquants :

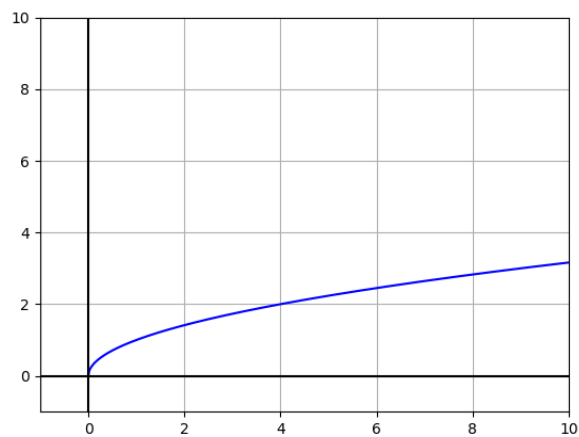
1. Fonction f_1 de graphique :



2. Fonction f_2 de graphique :



3. Fonction f_3 de graphique :

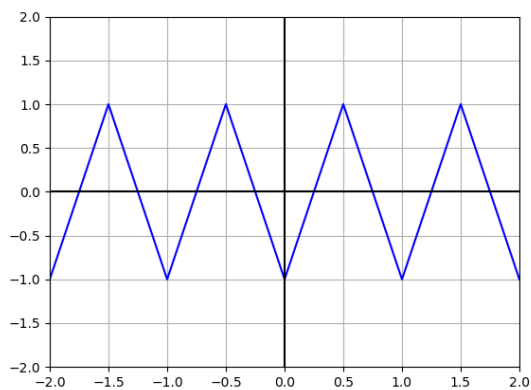


Exercice 17

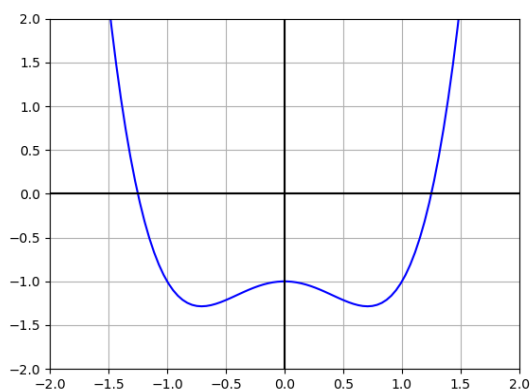
Pour chacune des fonctions suivantes :

- Donner sa parité et sa périodicité
- Dire si elle est majorée, minorée, bornée
- Déterminer, s'ils existent, son maximum et son minimum

1. Fonction f de graphe :



2. Fonction g de graphe :



3. Fonction h de graphe :

