

## Fonctions réelles usuelles

**Outils d'étude****Exercice 1**

Démontrer qu'une fonction réelle est bornée si et seulement si sa valeur absolue est majorée.

**Exercice 2**

1. Soit  $f$  une fonction paire définie sur  $\mathbb{R}$ .  
 $f$  est-elle injective ?
2. Soit  $f$  une fonction périodique définie sur  $\mathbb{R}$ .  
 $f$  est-elle injective ?

**Exercice 3**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ .  
Montrer que, si  $f$  et  $g$  sont croissantes sur  $I$ , alors  $f + g$  aussi.

**Exercice 4**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies un intervalle  $I$ .  
Dans tout l'exercice, on suppose que  $f$  et  $g$  sont croissantes sur  $I$ .

1. Dans cette question, on suppose que  $f$  et  $g$  sont positives sur  $I$ .  
Montrer que  $f \times g$  est croissante sur  $I$ .
2. Dans cette question, on suppose que  $f$  et  $g$  sont négatives sur  $I$ .  
Que peut-on dire de la monotonie de  $f \times g$  dans ce cas ?
3. Dans cette question, on ne fait aucune hypothèse sur le signe de  $f$  et  $g$ .  
Que peut-on dire de la monotonie de  $f \times g$  dans ce cas ?

**Exercice 5**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ .  
Soient  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow I$  deux fonctions réciproques l'une de l'autre.  
Démontrer que leurs représentations graphiques, notées respectivement  $C_f$  et  $C_g$ , sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

**exp, ln et fonctions associées****Exercice 6**

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels strictement positifs.  
Parmi les relations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1.  $(a^b)^c = a^{bc}$
2.  $a^b a^c = a^{bc}$
3.  $a^{2b} = (a^b)^2$
4.  $(ab)^c = a^{c/2} b^{c/2}$
5.  $(a^b)^c = a^{(b^c)}$
6.  $(a^b)^c = (a^c)^b$

**Exercice 7**

On note  $a = x$  et  $b = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$  où  $x$  désigne un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition de l'expression  $b$ .
2. Simplifier  $a^b$ .

**Exercice 8**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $5^{x^3} = 3^{x^5}$
2.  $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

**Exercice 9**

Pour tous  $a, b \in ]0, +\infty[$  avec  $b \neq 1$ , on définit :

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $\log_5(x + 5) = 3 + \log_5(x)$
2.  $\log_x(x + 6) = 2$

**Exercice 10**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $\ln(x^2 - 5x - 14) \geq \ln(2x^2 - 10x + 8)$
2.  $\ln(5x + 20) > \ln(3x - 2)$
3.  $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leq \ln(2)$

**Exercice 11**

1. Montrer que pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ ,  $\ln(1 + x) \leq x$
2. En déduire que pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

## Etude de fonctions

### Exercice 12

Pour chacune des fonctions suivantes, tracer l'allure de sa représentation graphique *sans utiliser de calculatrice*.

On n'attend pas de justification.

1.  $x \mapsto \left| (x - 2)(x + 4) \right|$
2.  $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$
3.  $x \mapsto \ln|x|$
4.  $x \mapsto e^{|x|}$

### Exercice 13

Soit  $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  où  $x$  désigne un réel.

1. Donner l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
2. Etudier la parité de  $f$ .

### Exercice 14

Soit  $f : x \mapsto \frac{x^2}{1 + x^2}$  où  $x$  désigne un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
2. Etudier la parité de  $f$ .
3. Etudier les variations de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .
4. Etudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
5. Tracer l'allure de la courbe de  $f$ .

### Exercice 15

Soit  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$  où  $x$  désigne un réel.

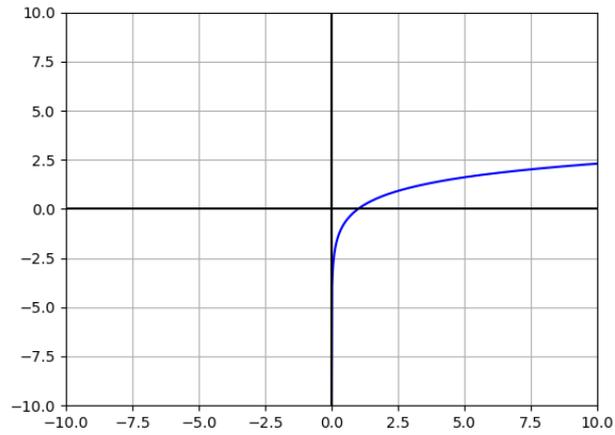
1. Donner l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
2. Démontrer que la courbe  $C$  de  $f$  admet un centre de symétrie.
3. Tracer l'allure de  $C$ .

## Graphiques

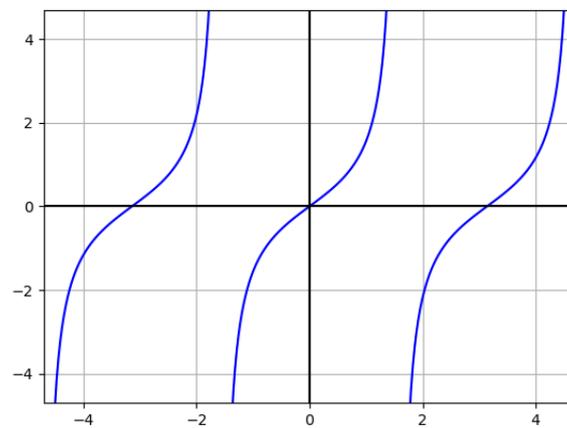
### Exercice 16

Reconnaître les fonctions associées aux graphes ci-dessous et compléter avec les éléments importants manquants :

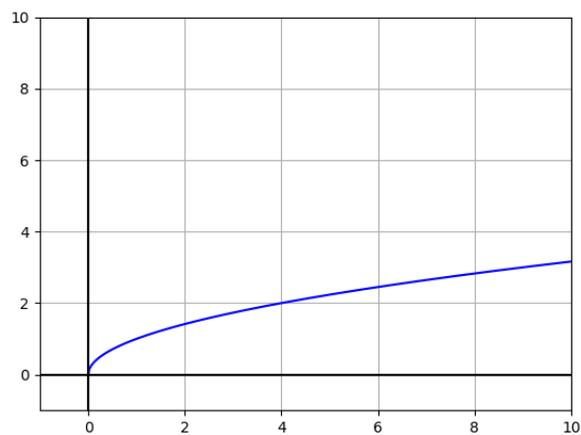
1. Fonction  $f_1$  de graphique :



2. Fonction  $f_2$  de graphique :



3. Fonction  $f_3$  de graphique :

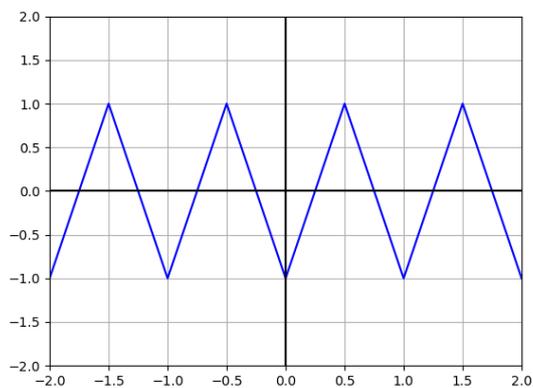


**Exercice 17**

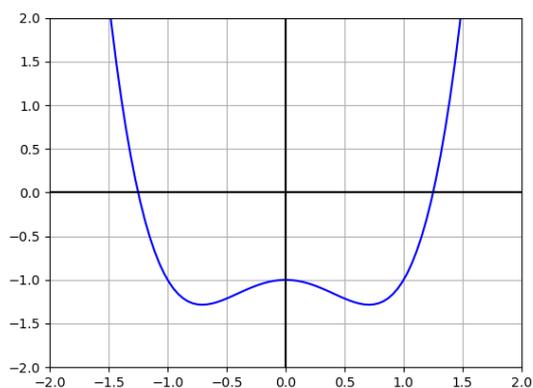
Pour chacune des fonctions suivantes :

- Donner sa parité et sa périodicité
- Dire si elle est majorée, minorée, bornée
- Déterminer, s'ils existent, son maximum et son minimum

1. Fonction  $f$  de graphe :



2. Fonction  $g$  de graphe :



3. Fonction  $h$  de graphe :

