Fonctions réelles usuelles

Outils d'étude

Exercice 1 (Correction complète)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle
On procède par double implication.

- Sens réciproque
  On suppose que la valeur absolue de f est majorée : ainsi, il existe M un réel tel que, pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant M$.
  On en déduit que, pour tout $x \in D$: $-M \leqslant f(x) \leqslant M$, ce qui prouve que f est minorée par $-M$ et majorée par M .
- Sens direct
  On suppose que f est bornée : ainsi, il existe m et M des réels tels que, pour tout $x \in D$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
  On distingue alors les cas :
  - → Si $0 \leqslant m \leqslant M$
    Dans ce cas, pour tout $x \in D$, $0 \leqslant f(x) \leqslant M$, et donc $|f(x)| \leqslant M$.
    Donc $|f|$ est majorée par M .
  - → Si $m \leqslant M \leqslant 0$
    Dans ce cas, pour tout $x \in D$, $m \leqslant f(x) \leqslant 0$ et donc $|f(x)| \leqslant |m|$.
    Donc $|f|$ est majorée par $|m|$.
  - → Si $m \leqslant 0 \leqslant M$ et $|m| \leqslant M$
    Dans ce cas, pour tout $x \in D$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ nous apprend que $|f(x)| \leqslant M$.
    Donc $|f|$ est majorée par M .
  - → Si $m \leqslant 0 \leqslant M$ et $|m| \geqslant M$
    Dans ce cas, pour tout $x \in D$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ nous apprend que $|f(x)| \leqslant |m|$.
    Donc $|f|$ est majorée par $|m|$.

  Dans tous les cas, la valeur absolue de f est majorée, soit par M, soit par $|m|$.
- Conclusion
  Une fonction réelle est bornée si et seulement si sa valeur absolue est majorée.

Exercice 2 (Correction complète)

1. Par parité, $f(2) = f(-2)$ donc f n'est pas injective.
2. On note T une période de f. Par périodicité, $f(0) = f(T)$. Donc f n'est pas injective.

Exercice 3 (Correction complète)

Soient $a, b \in I$ avec$a \leqslant b$.
Par croissance de f : $f(a) \leqslant f(b)$.
Par croissance de f : $g(a) \leqslant g(b)$.
Or, on peut additionner membre à membre des inégalités.
D'où : $f(a) + g(a) \leqslant f(b) + g(b)$.
C'est-à-dire : $\Big(f+g\Big)(a) \leqslant \Big(f(+g\Big)(b)$.
Ceci prouve que $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont croissantes sur I, alors } f+g \text{ est croissante sur I}}$.

Exercice 4 (Correction rapide)

1. Même rédaction que l'exercice 3, en utilisant la règle : si tous les membres sont positifs, alors on peut multiplier les inégalités membre à membre.
2. Même idée que l'exercice 3, mais en commençant par se ramener à une manipulation d'inégalités où tous les membres sont positifs.
   On trouve sur $f \times g$ est décroissante.
3. On ne peut pas conclure ; tout est possible.
   En se plaçant sur $]0, +\infty[$:
   Si $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto x^2$, alors $fg : x \mapsto -x$ est décroissante sur I.
   Si $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ et $g : x \mapsto x$, alors $fg : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est croissante sur I.

Exercice 5 (Correction complète)

- Brouillon
  Soit $x \in I$. Le point $M(x, f(x))$ appartient à la courbe C_f.
  Symétriser par rapport à la première bissectrice, c'est échanger les abscisses et les ordonnées. C'est une idée qu'on avait déjà rencontré dans le chapitre de trigonométrie, quand on a établi certaines formules trigonométriques (celles pour $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$).
  Ainsi, le symétrique de M par rapport à la première bissectrice est le point $M'(f(x), x)$.
  Pour que les courbes C_f et C_g soient symétriques, il faut montrer que $M' \in C_g$.
  Mais, attention, cela ne suffit pas ! Le fait que M' appartienne à C_g prouve seulement que : la symétrique de C_f par rapport à a première bissectrice est incluse dans C_g.
  Pour finir de répondre à la question, il faut encore démontrer l'inclusion réciproque.
- Réponse
  Soit $x \in I$. On note $M(x, f(x))$ le point associé de C_f.
  On considère alors $M'(f(x), x)$ le symétrique de M par rapport à la première bissectrice.
  L'abscisse de M' est $X = f(x)$ et son ordonnée est $Y = x$.
  De plus : $g(X) = g\Big(f(x)\Big) = x = Y$, ce qui prouve que $M' \in C_g$.
  Donc la courbe symétrique de C_f par rapport à la première bissectrice est incluse dans C_g.
  On démontrer de même que la courbe symétrique de C_g par rapport à la première bissectrice est incluse dans C_f.
  Conclusion : C_f et C_g sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice.

$\exp$, $\ln$ et fonctions associées

Exercice 6

1. Vrai
2. Faux
   On pourrait écrire $a^b a^c = a^{b+c}$ ou $a^{bc} = (a^b)^c = (a^c)^b$
3. Vrai
4. Faux
   On pourrait écrire $(ab)^c = a^c b^c$ ou $a^{c/2} b^{c/2} = (ab)^{c/2}$
5. Faux
   On pourrait écrire $(a^b)^c = a^{bc}$
6. Vrai

Exercice 7 (Correction complète)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & b \text{ exsite} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\ln\Big(\ln(x)\Big)}{\ln(x)} \text{ existe} \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{cases} x > 0 & (\ln) \\ \ln(x) \neq 0 & (\text{division}) \\ \ln(x) > 0 & (\ln(\ln)) \end{cases} \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{L'ensemble de définition de } b \text{ est }]1, +\infty[.}$

   Attention aux éléments importants de rédaction : le "soit $x \in \mathbb{R}$" au début, les équivalences, le fait de rassembler tous les critères ensembles via l'accolade et la formulation de la conclusion.

2. Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} a^b &= \exp(\, b \ln(a)\,) \\ &= \exp\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \ln(x)\right) \\ &= \exp\Big(\ln(\ln(x))\Big) \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$

   $\boxed{a^b = \ln(x)}$

Exercice 8 (Correction complète)

1. On résout dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& 5^{x^3} = 3^{x^5} \\
\Leftrightarrow \quad & \exp\Big(x^3 \ln(5) \Big) = \exp\Big(x^5 \ln(5) \Big) \\
\Leftrightarrow \quad & x^3 \ln(5) = x^5 \ln(3) \\
\Leftrightarrow \quad & x^3 \Big(\ln(5) - x^2 \ln(3) \Big) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^3 = 0 \text{ ou } \ln(5) - x^2 \ln(3) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \text{ ou } x^2 = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{\ln(5)}{\ln(3)}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{\ln(5)}{\ln(3)}} \quad \left(\text{possible car } \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \geqslant 0\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \left\{ 0\,,\ \sqrt{\frac{\ln(5)}{\ln(3)}}\,,\ -\sqrt{\frac{\ln(5)}{\ln(3)}} \right\}.}$$

2.
- Ensemble dé résolution

  Soit $x \in \mathbb{R}$.

  L'équation a du sens

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 & \text{(racine)} \\ x > 0 & (x \text{ est en exposent}) \end{cases}$$

- Résolution

  On résout en fait sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
& x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \\
\Leftrightarrow \quad & \exp\Big(\sqrt{x} \ln(x) \Big) = \exp\Big(x \ln(\sqrt{x}) \Big) \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x} \ln(x) = x \ln(x^{1/2}) \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x} \ln(x) = x \, \frac{1}{2} \ln(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \ln(x) \Big(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \Big) \\
\Leftrightarrow \quad & \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{x}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & x = 1 \text{ ou } 2\sqrt{x} = x \\
\Leftrightarrow \quad & x = 1 \text{ ou } 4x = x^2 \qquad \text{(tous les memes sont positifs)} \\
\Leftrightarrow \quad & x = 1 \text{ ou } x(4 - x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 4
\end{aligned}$$

  Or : $x = 0$ est exclu de l'ensemble de résolution.

  $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \{1, 4\}.}$

  Remarque : de façon générale, 0^0 n'est pas défini, de la même façon que $\frac{1}{0}$ n'est pas défini.

Exercice 9

Fait en classe.

Exercice 10 (Correction partielle)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   L'inéquation a du sens
   $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 14 > 0 \\ 2x^2 - 10x + 8 > 0 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \dots$

   On résout sur $]-\infty\,,\,-2\,[\cup]\,7\,,\,+\infty\,[$.
   $$\begin{aligned} \ln(x^2 - 5x - 14) \geqslant \ln(2x^2 - 10x + 8) &\Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 \geqslant 2x^2 - 10x + 8 \quad \text{(par croissance de } \ln) \\ &\Leftrightarrow 0 \geqslant x^2 - 5x + 22 \end{aligned}$$

   Pour ce trinôme, $\Delta < 0$.

   $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \emptyset \text{ .}}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   L'inéquation a du sens
   $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 20 > 0 \\ 3x - 2 > 0 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \dots$

   On résout sur $]\,\frac{2}{3}\,,\,+\infty\,[$.
   $$\begin{aligned} \ln(5x + 20) > \ln(3x - 2) &\Leftrightarrow 5x + 20 > 3x - 2 \quad \text{(par stricte croissance de } \ln) \\ &\Leftrightarrow x > -11 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est }]\,\frac{2}{3}\,,\,+\infty\,[\text{ .}}$

3. On résout sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,,\,-\frac{1}{2}\}$.

$$\begin{aligned}\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leqslant\ln(2) &\Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{2x+1}\right|\leqslant 2\\ &\Leftrightarrow |x+1|\leqslant 2|2x+1|\end{aligned}$$

Pour savoir comment enlever les valeurs absolues, on dresse un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	

On distingue alors les cas :

- Sur $]-\infty\,,\,-1\,[$
$$\begin{aligned}\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leqslant\ln(2) &\Leftrightarrow -x-1\leqslant 2(-2x-1)\\ &\Leftrightarrow \dots\\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\geqslant x\end{aligned}$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $]-\infty\,,\,-1\,[$.
- Sur $]-1\,,\,-\frac{1}{2}\,[$
$$\begin{aligned}\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leqslant\ln(2) &\Leftrightarrow x+1\leqslant 2(-2x-1)\\ &\Leftrightarrow \dots\\ &\Leftrightarrow x\leqslant -\frac{3}{5}\end{aligned}$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $]-1\,,\,-\frac{3}{5}\,[$.
- Sur $]-\frac{1}{2}\,,\,+\infty\,[$
$$\begin{aligned}\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leqslant\ln(2) &\Leftrightarrow x+1\leqslant 2(2x+1)\\ &\Leftrightarrow \dots\\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\leqslant x\end{aligned}$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $[-\frac{1}{3}\,,\,+\infty\,[$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est }]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]-1\,,\,-\frac{3}{5}\,]\,\cup\,[-\frac{1}{3}\,,\,+\infty\,[\,.}$$

Exercice 11 (Correction partielle)

1. **Indication / Astuce classique**
   On pose f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln(1+x) \end{array}$$

   Etudions les variations de f.
   f est dérivable sur $]-1,+\infty[$. Soit $x \in]-1,+\infty[$.
   $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.

x	-1		0		$+\infty$
x	||	$-$	0	$+$	
$1+x$	||	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

   On constate que, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $0 \leqslant f(x)$.
   C'est-à-dire : pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $0 \leqslant x - \ln(1+x)$.
   C'est-à-dire : $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x}$.

2. Pour la première inéquation, poser $x = \dfrac{1}{n}$ et pour la deuxième poser $x = -\dfrac{1}{n}$.

Etude de fonctions

Exercice 12

(Sera fait en classe)

Exercice 13 (Correction complète)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & f(x) \text{ existe} \\ \Leftrightarrow\ & \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \text{ existe} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 1+x^2 \geqslant 0 \ (I_1) & \text{(racine))} \\ x+\sqrt{x^2+1} > 0 \ (I_2) & \text{(ln)} \end{cases} \end{aligned}$$

- Concernant (I_1)
  $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$ donc (I_1) est vérifiée.
- Concernant (I_2)
  $x+\sqrt{x^2+1} > 0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{x^2+1} > -x$
  → Si $x < 0$
  Dans ce cas $\sqrt{x^2+1} > -x \ \Leftrightarrow\ x^2+1 > x^2 \ \Leftrightarrow\ 1 > 0$
  Ceci est toujours vrai.
  → Si $x \geqslant 0$
  Dans cas, d'une part $\sqrt{x^2+1}$ est positif et $-x$ est négatif.
  Donc on a forcément $\sqrt{x^2+1} > -x$.

Conclusion : $\boxed{D = \mathbb{R}}$.

2. Tout d'abord, D est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \\ &= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) \\ &= -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

Exercice 14 (Correction très rapide)

1. $\mathsf{D} = \mathbb{R}$.
2. D est symétrique par rapport à 0 et on trouve que f est paire.
3. On dérive. On trouve $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.
   Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
4. On factorise en haut et en bas par x^2.
   On trouve que la limite vaut 1.
5. Voir Geogebra.

Exercice 15 (Correction incomplète)

1. $\mathsf{D} =]-\infty\,,\,-3\,[\cup]\,2\,,\,+\infty\,[$
2. • Analyse
   On suppose que C admet pour centre de symétrie le point $\Omega(a, b)$.
   Tout d'abord, à cause de D, on obtient $a = -\dfrac{1}{2}$.
   De plus, les points $M(3, f(3))$ et $M'(-4, f(-4))$ sont symétriques par rapport à Ω .
   Or : $f(3) = \ln(6)$ et $f(-4) = \ln\left(-\dfrac{1}{6}\right) = -\ln(6)$.
   On en déduit que, forcément, $b = 0$.
   • Synthèse
   On pose $\Omega(-\dfrac{1}{2}\,,\,0)$.
   Soit $\delta > \dfrac{5}{2}$.
   Ainsi, $-\dfrac{1}{2} + \delta$ et $-\dfrac{1}{2} - \delta$ appartiennent tous deux à D et sont symétriques par rapport à $-\dfrac{1}{2}$.
   De plus :
   $f(-\dfrac{1}{2} + \delta) = \cdots = \ln\left(\dfrac{\frac{5}{2}+\delta}{-\frac{5}{2}+\delta}\right)$
   $f(-\dfrac{1}{2} - \delta) = \cdots = -\ \ln\left(\dfrac{\frac{5}{2}+\delta}{-\frac{5}{2}+\delta}\right)$
   Ces calculs prouvent que C admet Ω comme centre de symétrie.
3. Le faire.

Graphiques

Exercice 16

1. On reconnaît la courbe de ln.
   On pourrait placer le point de coordonnées $(1, 0)$ et l'asymptote verticale d'équation $x = 0$.
2. On reconnaît la courbe de tan.
   On pourrait placer les abscisses $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{3\pi}{2}$ ainsi que les asymptotes verticales d'équation $x = \frac{pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{3\pi}{2}$

Exercice 17

1. f est paire, périodique de période 1, majorée, minorée, bornée. Son maximum est 1 et son minimum est -1.
2. g est paire, minorée. Son minimum est environ $-1,25$.
   (Et c'est tout)
3. h est impaire.
   (Et c'est tout)