Calcul matriciel

Prérequis
Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

A la suite du cours de 1ère année.

Calcul matriciel

Calcul 26.1 — Calculs de produits matriciels.

Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) $B \times E$

d) $E \times B$

e) $A \times E$

f) $B \times A$

g) D^2 ...

h) $D \times C$

i) $B^\top \times B$

Calcul 26.2 — Calcul de puissances.

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) A^k ...

d) B^2 ...

e) B^3 ...

f) B^k ...

g) C^2 ...

h) C^3 ...

i) C^k ...

j) D^2 ...

k) D^3 ...

l) D^k ...

Calcul 26.3 — Calculs avec des sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \qquad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}$$

Donner le coefficient d'indice (i,j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole $\sum$.

a) $A \times B$ ....

b) B^2 ....

c) $B^\top \times B$ ....

d) $[A^2]_{i,j}$ ....

Inversion de matrices

Calcul 26.4 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.

Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A ...

b) B ...

c) C ...

d) D ...

e) E ...

f) F ...

g) G ...

h) H ..

i) J ...

Calcul 26.5 — Matrices dépendant d'un paramètre.

On note λ et μ deux paramètres réels. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A inversible . .

b) Inverse de A . . .

c) CNS pour B inversible . .

d) Inverse de B . . .

Réponses mélangées

$\lambda \neq 1$ $\quad \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$ $\quad$ Non inversible ! $\quad \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$

$\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$

$2^{i+1}3^{j-i}(2^n-1)$ $\quad \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda \neq 1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2^k & 3^k-2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad 2^{i-j}\dbinom{i-1}{j-1}$ $\quad$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$

$n^{k-1}D$ $\quad$ 17 (matrice 1×1) $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{1}{2(\pi-e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$

$\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$ $\quad 2 \times 3^{i+j}\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$ $\quad 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$

$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} \\ 1 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$