

# Fiche n° 26. Calcul matriciel

## Réponses

26.1 a) .....  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

26.1 b) .....  $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$

26.1 c) ..... 17 (matrice  $1 \times 1$ )

26.1 d) .....  $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

26.1 e) .....  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

26.1 f) .....  $(-5 \ 15 \ 3)$

26.1 g) .....  $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

26.1 h) .....  $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

26.1 i) .....  $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

26.2 a) .....  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 b) .....  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 c) .....  $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 d) .....  $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

26.2 e) .....  $\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

26.2 f) .....  $\begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

26.2 g) .....  $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

26.2 h) .....  $\begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$

26.2 i) ... Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$

26.2 j) .....  $\begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$

26.2 k) .....  $\begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$

26.2 l) .....  $n^{k-1}D$

26.3 a) .....  $2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$

26.3 b) .....  $2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1)$

26.3 c) .....  $2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

26.3 d) .....  $2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}$

26.4 a) .....  $\frac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$

26.4 b) .....  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 - 2i \\ 1 & -1 + i \end{pmatrix}$

26.4 c) .....  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

26.4 d) .....  $\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

26.4 e) .....  $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

26.4 f) .....  $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

26.4 g) .....  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

26.4 h) ..... Non inversible!

26.4 i) .....  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

26.5 b) .....  $\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

26.5 a) .....  $\lambda \neq 1$

26.5 c) .....  $\lambda \neq 1$

26.5 d) .....  $\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

## Corrigés

26.2 a) Un calcul direct donne  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

26.2 b) Un calcul direct donne  $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

26.2 c) On peut conjecturer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Il resterait à le démontrer par récurrence sur  $k$ .

26.2 d) On calcule :  $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ .

26.2 e) On calcule :  $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$ .

26.2 f)

On peut conjecturer que pour chaque  $k$  il existe un réel  $u_k$  tel que  $B^k = \begin{pmatrix} 2^k & u_k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

Cela impose successivement  $u_{k+1} = 2^k + 3u_k$ ,  $\frac{u_{k+1}}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \frac{2^k}{3^k} + \frac{u_k}{3^k}$  et enfin  $u_k = 3^k - 2^k$

Finalement on conjecture que  $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ . Il resterait à le démontrer par récurrence sur  $k$ .

26.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

26.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.

À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit  $D \times D$ , chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à  $n$  :  $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$ .

En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^n [D]_{ik} [D]_{kj} = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

26.2 k) Comme  $D^2 = nD$ ,  $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2D$ .

26.2 l) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $n^{k-1}D$  Il resterait à le démontrer par récurrence sur  $k$ .

**26.3 a)** On calcule :

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k}$$

Mais si  $k > i$ ,  $\binom{i-1}{k-1} = 0$ , donc

$$\begin{aligned} [A \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^i \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{j-\ell-1} \text{ en faisant le changement d'indice } \ell = k-1 \\ &= 2 \times 3^{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^\ell \\ &= 2 \times 3^{j-1} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^{i-1} \\ &= 2 \times 3^{j-1} \times \frac{5^{i-1}}{3^{i-1}} = 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1} \end{aligned}$$

**26.3 b)** On calcule :

$$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n 2^i 3^{k-i} 2^k 3^{j-k} = 2^i 3^{j-i} \sum_{k=1}^n 2^k = 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1).$$

**26.3 c)** On calcule :

$$[B^\top \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^n [B^\top]_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^n 2^k 3^{i-k} 2^k 3^{j-k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

**26.3 d)** Déjà, la matrice  $A^2$  est triangulaire inférieure (produit de deux matrices triangulaires inférieures). Soit  $j \leq i$ . Alors

$$\begin{aligned} [A^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^n \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\ &= \sum_{k=j}^i \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\ &= \sum_{k=j}^i \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\ &= \sum_{k=j}^i \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(k-j)!(i-j-(k-j))!} \\ &= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^i \binom{i-j}{k-j} \\ &= \binom{i-1}{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-j} \binom{i-j}{\ell} \text{ en posant } \ell = k-j \\ &= 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}. \end{aligned}$$

**26.4 a)** On remarque que  $2\pi - 2e = 2(\pi - e) \neq 0$ , donc  $A$  est inversible d'inverse  $\frac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$ .

26.4 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2/2 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - 1/2L_3 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - 1/2L_3 \end{aligned}$$

Donc  $B$  est inversible d'inverse  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

26.4 d) Il ne faut pas avoir peur du  $\pi$  et écrire que  $C = \pi \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . On calcule alors (par pivot de Gauss) que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } C \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

26.4 h)  $\text{rg}(H) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -12 & -12 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & -9 & -10 \end{pmatrix} = 3 \neq 4$

26.5 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftrightarrow L_1 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{aligned}$$

Si  $\lambda = 1$ , alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{1-\lambda} L_2 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 4/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & -3/(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{1-\lambda} L_3 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow -L_1 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_2 \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est  $\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$