Matrices

Techniques de calcul : puissances et inverses

Exercice 1

On note $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soient $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer $B = P^{-1}AP$.
2. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer $B = P^{-1}AP$.
2. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Dans chacune des cas suivants, déterminer si M est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse.

1. $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $C^2 - 4C$ et en déduire que C est inversible.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel k, il existe deux réels a_k et b_k tels que : $C^k = a_k C + b_k I_3$.

Exercice 7

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 2A^2 + 2A$.
2. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 8

1. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. Résoudre, en fonction des valeurs du paramètres m, le système :
$(S_m) : \begin{cases} mx & + & y & = & m+4 \\ 2x & + & (m+1)y & = & -2m-6 \end{cases}$

Exercice 9

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit le système suivant :

$$(S_m) \ : \ \begin{cases} (m+1)x & + & my & = & 2m \\ mx & + & (m+1)y & = & 1 \end{cases}$$

Résoudre le système (S_m) en fonction des valeurs du paramètres (S_m) .

Approfondissement

Exercice 10

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $R_\alpha \, R_\beta = R_{\alpha+\beta}$.
2. En déduire une expression de $(R_\alpha)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice R_α est-elle inversible ?
   Si oui, déterminer son inverse.

Exercice 11

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & u_n & - & v_n \\ v_{n+1} & = & -u_n & + & v_n \end{array} \right.$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   Etablir une relation entre W_{n+1}, A et W_n .
   (b) En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

L'observation commence le jour numéro 0 : la colonie comporte alors 5000 fourmis. Le jour numéro 1, la colonie comporte 5100 fourmis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de fourmis le $n^{\text{ème}}$ jour, exprimé en milliers. Ainsi, $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10% chaque jour. Cela se traduit par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \; u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n)$$

Enfin, pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$
.

1. Déterminer V_0 ainsi qu'une relation de récurrence reliant V_{n+1} à V_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Démontrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$
   (c) En déduire une expression de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   Interpréter.

Exercice 13

On dit qu'une matrice carrée A est antisymétrique si $A^T = -A$.

Montrer que tout matrice carrée peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 14

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\sigma(A)$ la somme de tous les coefficients de A.

On pose également J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

Montrer que $JAJ = \sigma(A) \, J$.