DM4 (Correction)

Exercice1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{e^x}{e^x - 1}$ existe

$$\Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0$$

L'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}^*$.2. (a) Par les théorèmes de dérivation, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$$

On donne les variations de f dans un tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
f	↘		↘

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(c) On regroupe les réponses précédentes dans un seul tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$-\infty$	$+\infty$
	↘		↘
		1	

Ainsi, $f(D) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ 3. Soit $y \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. On résout en cherchant $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x - 1} = y$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^x y - y$$

$$\Leftrightarrow e^x(y - 1) = y$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{y - 1} \quad (\text{possible car } y \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{y - 1}\right) \quad (\text{possible car } 0 < \frac{y}{y - 1})$$

Enfin : $\ln\left(\frac{y}{y - 1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{y - 1} = 1 \Leftrightarrow y = y - 1$, qui est impossible.Ainsi, on a trouvé une seule solution et cette solution appartient bien à $\mathbb{R}^*$.Ceci prouve que f est injective, surjective et bijective.La réciproque de f est :

$$f^{-1} :]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$y \mapsto \ln\left(\frac{y}{y - 1}\right)$$