Dérivées, primitives et intégrales

Dérivées

Exercice 1

1. Montrer que, si $x \in [0, +\infty[$, alors $\sin(x) \leqslant x$.
2. Montrer que, si $x \in]-\infty, 0]$, alors $\sin(x) \geqslant x$.

Exercice 2

Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$$

Indication : on pourra commencer par passer au ln.

Exercice 3

Soient $0 < a \leqslant b$. On définit alors :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$$

$$g : x \mapsto a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer les variations de f sur $]0, +\infty[$.
3. En déduire que $\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant \left(\ln(2)\right)^2$

Exercice 4

Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{|1-x^2|}}{x}$.

Exercice 5

Etudier la fonction $f : x \mapsto x \exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Dérivées partielles

Exercice 6

Déterminer les dérivées partielles des fonctions définies par :

1. $f(x,y) = xy^2 + yx^2$
2. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$
3. $f(x,y) = \exp(xy^2)$

Exercice 7

L'équation d'état des gaz parfaits est $PV = nRT$ où :

- P est la pression du gaz (en Pa)
- V est le volume occupé par le gaz (en m^3)
- n est la quantité de matière (en mol)
- R est la constante universelle des gaz parfaits (en u.s.i.)
- T est la température (en K)

Démontrer que $\dfrac{\partial V}{\partial T} \times \dfrac{\partial T}{\partial P} \times \dfrac{\partial P}{\partial V} = -1$

Primitives et intégrales

Exercice 8

Déterminer une primitive des fonctions définies par :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2-1)^3}$
3. $f : x \mapsto (x-1)e^{x^2-2x}$
4. $f : x \mapsto x(x^2+1)^5$
5. $f : x \mapsto (x^2-1)^4$
6. $f : x \mapsto (x+3)(x-1)^4$

Exercice 9

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2x)\sin^3(x)\, dx$.

Exercice 10

En se servant d'intégration(s) par parties, déterminer une primitive des fonctions définies par :

1. $f : x \mapsto (x-1)\cos(x)$
2. $f : x \mapsto x^n \ln(x)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$)
3. $f : x \mapsto xe^x$
4. $f : x \mapsto \left(x^2+1\right)e^x$
5. $f : x \mapsto x^2\left(1-\ln(x)\right)$
6. $f : x \mapsto x^2\cos(x)$

Exercice 11

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)+1}}$ avec $u = \ln(t)$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{2+t}}{1+t}\, dt$ avec $t = u^2 - 2$

   Indication : on pourra démontrer qu'il existe des réels a, b *et* c *tels que, pour tout* $u \in \mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$ *:*
   $\dfrac{2u^2}{u^2-1} = a + \dfrac{b}{u-1} + \dfrac{c}{u+1}$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^3(t)\, dt$ avec $u = \sin(t)$

Exercice 12

Un collègue de physique vient vous voir parce que l'étude d'un système l'a mené à un calcul qu'il ne sait pas finir. Il serait question de calculer le "travail des forces pressantes" (?).

D'après le collègue de physique, il est bien évident que $\delta W_p = -P\,dV$. Par ailleurs, le collègue de physique ajoute que le gaz est parfait et que la transformation a lieu entre un volume V_1 et un volume V_2. Le collègue de physique voudrait connaître le travail total.

Faîtes les liens entres les maths et la physique et répondez au collègue de physique.