

Intégration par parties

Prérequis
Primitives, dérivées, intégration par parties.

A la suite du cours de 1ère année.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Intégrales

Calcul 13.1



Calculer :

- | | |
|---|---|
| <p>a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>g) $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |
| <p>b) $\int_0^1 (2t+3)\sin(2t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>h) $\int_0^1 t \arctan(t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |
| <p>c) $\int_0^2 t e^{\frac{t}{2}} dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>i) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |
| <p>d) $\int_1^{\ln 2} t 2^t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>j) $\int_0^1 t\sqrt{1+t} dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |
| <p>e) $\int_1^e \ln(t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>k) $\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |
| <p>f) $\int_1^2 t \ln(t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2(t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |

Primitives

Calcul 13.2



Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

- | | |
|--|--|
| <p>a) $x \mapsto (-x+1)e^x$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p> | <p>c) $x \mapsto \arctan(x)$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p> |
| <p>b) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p> | <p>d) $x \mapsto x \cos(x)$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p> |

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 13.3 — Calcul d'intégrales.



a) $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin(t) dt \dots\dots\dots$

Calcul 13.4 — Calcul de primitives.



Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto x^2 e^{-x} \dots\dots\dots$

c) $x \mapsto \ln^2(x) \dots\dots\dots$

b) $x \mapsto x^2 \sin(x) \dots\dots\dots$

d) $x \mapsto (x \ln(x))^2 \dots\dots\dots$

Réponses mélangées

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) - 2 \end{array} \right. \quad 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \left(\frac{1}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} \ln x + \frac{2}{27} \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \end{array} \right. \quad \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sin(x) + \cos(x) \end{array} \right.$$

$$4 \quad \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \end{array} \right. \quad \frac{5}{2} - e^2 \quad 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$\frac{(\ln(2))^{2 \ln(2)} - 2 \ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2} \quad \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1 + \ln x}{x} \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi}{2} - 1 \quad -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3} \quad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32} \quad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} \end{array} \right.$$

$$\frac{4}{3} \sqrt{2} \ln(2) - \frac{8}{9} \sqrt{2} + \frac{4}{9} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x + 2)e^x \end{array} \right. \quad -\frac{5}{2} \cos(2) - \frac{1}{2} \sin(2) + \frac{3}{2}$$