Devoir Surveillé n°3

Samedi 30 novembre 2024 - Durée : 1h45

L'usage de la calculatrice est interdit.
Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.
Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Exercice 1

Dans une usine, une machine produit des axes de moteurs électriques. La machine se déréglant au cours du temps, on décide de noter chaque jour le pourcentage des axes défectueux produits. On obtient alors le tableau suivant :

Jour x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage d'axes défectueux y_i	$0,8$	$1,1$	$1,9$	$2,3$	$2,1$	$2,4$	$2,8$	$2,9$

Pour tout l'exercice, on note (x, y) la série statistique bivariée décrite dans ce tableau.

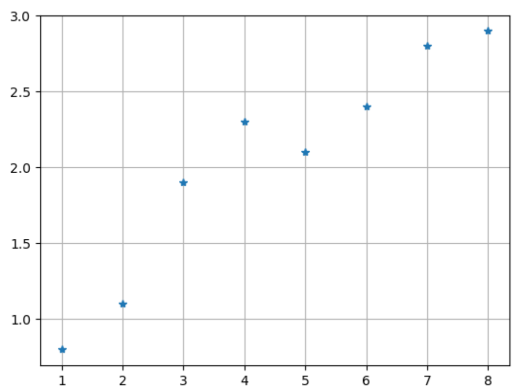
Pour tout l'exercice, les programmes sont à rédiger en langage Python. L'annexe page 3 comporte des rappels sur les commandes utiles. On suppose de plus que le fichier Python débute par l'importation du module **matplotlib.pyplot** et par la définition des deux listes Lj et Lp de la façon suivante :

```
import matplotlib.pyplot as plt

Lj = [1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8]
Lp = [0.8 , 1.1 , 1.9 , 2.3 , 2.1 , 2.4 , 2.8 , 2.9]
```

Dans tout l'exercice, il est demandé d'écrire des fonctions Python qui prennent en arguments deux listes **X** et **Y** représentant une série statistique bivariée. Ainsi, **X** et **Y** sont des listes non vides de nombres et **X** et **Y** sont de même longueur.

1. Ecrire une fonction Python **graphique** qui prend en argument **X** et **Y** et qui affiche le nuage de points associé à la série statistique. Les points seront représentés par des étoiles et la grille sera affichée.
   Ainsi, l'utilisation dans le Shell de la commande **graphique(Lj,Lp)** devra produire l'affichage de :



2. On note d la droite qui réalise l'ajustement affine de y en x.
   On note a la pente de cette droite et b son ordonnée à l'origine.
   (a) Rappeler la formule de König-Huygens pour la série statistique univariée x, la formule de König-Huygens pour la série statistique bivariée (x, y) ainsi que les formules permettant de calculer a et b.
   (b) Ecrire une fonction Python **pente** qui prend en argument **X** et **Y** et qui renvoie la valeur de a.
   Cette fonction devra parcourir au maximum une fois chaque liste.
   (c) Ecrire une fonction Python **ordonnee_origine** qui prend en argument **X** et **Y** et qui renvoie la valeur de b.
   Cette fonction pourra utiliser la précédente.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on note I_3 la matrice identité d'ordre 3 et on considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

On se propose de calculer les puissances de A par deux méthodes différentes et indépendantes.

1. Méthode 1
   On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Calculer $D = PAP^{-1}$.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.
   (d) Justifier *brièvement* que D et A sont inversibles.
   (e) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^{-n} en fonction de n.

2. Méthode 2
   On pose $B = A - 2I_3$.
   (a) Calculer B^2 puis déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B^n en fonction de B et n.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de A^n en fonction de A, I_3 et n.

Exercice 3

On définit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$ où x désigne un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.
2. Etudier la parité de f.
3. (a) Etudier le signe de $\frac{1+x}{1-x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
   (b) Justifier que, pour tout $x \in D$, $f'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$.
   (c) En déduire les variations de f sur D.
4. f est-elle injective ?

Exercice 4

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_a par :

$$f_a : x \mapsto \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a}$$

où x désigne un réel.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble de définition D_a de f_a.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble des antécédents de 0 par f_a.
   On veillera à vérifier que les antécédents trouvés appartiennent bien D_a.
3. Démontrer que f_1 est bijective de D_1 dans un ensemble à déterminer et préciser f_1^{-1}.

Annexe - Rappels Python pour l'exercice 1

On suppose que le module **matplotlib.pyplot**, qui permet de tracer des graphiques, est importé via :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
```

Les variables **X** et **Y** sont ici deux listes de réels, non vides, de même longueur.

Python	Interprétation
plt.plot(X,Y)	Place les points dont les abscisses sont contenues dans **X** et les ordonnées dans **Y** et les relie entre eux par des segments. Si cette fonction n'est pas suivie de **plt.show()**, le graphique n'est pas affiché.
plt.grid()	Dessine en arrière plan du graphique un quadrillage.
plt.show()	Affiche le(s) tracé(s) précédemment créé(s) par **plt.plot**
plt.plot(X,Y,"o")	Même effet que **plt.plot(X,Y)** à la différence près que les points sont représentés par un symbole en forme de cercle et ne sont pas reliés. En remplaçant **o** par **s** (respectivement par *), le symbole est un carré (respectivement une étoile).