Dérivées, primitives et intégrales

Dérivées

Exercice 1 (Correction complète)

1. On définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{rcl} [0\,,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \sin(x) \end{array}$$

Par les théorèmes opératoires, f est dérivables sur son ensemble de définition.
$\forall x \in [0\,,+\infty[\,,\ f'(x) = 1 - \cos(x)$.
Puisque le cos est majoré par 1, on obtient le tableau ci-dessous :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, pour tout $x \in [0\,,+\infty[\,,\ 0 \leqslant f(x)$.
C'est-à-dire : $\boxed{\forall x \in [0\,,+\infty[\,,\ \sin(x) \leqslant x}$.

2. On définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{rcl}]-\infty\,,0] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \sin(x) \end{array}$$

Par les théorèmes opératoires, f est dérivables sur son ensemble de définition.
$\forall x \in]-\infty\,,0]\,,\ f'(x) = 1 - \cos(x)$.
Puisque le cos est majoré par 1, on obtient le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	
f		$\nearrow$	0

D'après le tableau de variations, pour tout $x \in]-\infty\,,0]\,,\ f(x) \leqslant 0$.
C'est-à-dire : $\boxed{\forall x \in]-\infty\,,0]\,,\ \sin(x) \geqslant x}$.

Exercice 2 (Correction complète)

- On commence par transformer l'inégalité que l'on chercher à démontrer.
  Soit $x \in]\,0\,,\,1\,[$.

$$\begin{array}{ll} & x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2} \\[2ex] \Leftrightarrow & \exp\Big(x\,\ln(x)\Big)\ \exp\Big((1-x)\ \ln(1-x)\Big) \geqslant \dfrac{1}{2} \\[2ex] \Leftrightarrow & \exp\Big(x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)\Big) \geqslant \dfrac{1}{2} \\[2ex] \Leftrightarrow & x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x) \geqslant \ln(\dfrac{1}{2}) \\[2ex] \Leftrightarrow & x\ln(x)+(a-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2) \\[2ex] \Leftrightarrow & x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)+\ln(2) \geqslant 0 \end{array}$$

- On définit la fonction f par :

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ ]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)+\ln(2) \end{array}$$

- On étudie les variations de la fonction f
  Par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $]0,1[$.
  Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x)+x\times\frac{1}{x}-\ln(1-x)+(1-x)\times\frac{-1}{1-x} \\ &= \ln(x)-\ln(1-x)+1-1 \\ &= \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

  On résout :

$$\begin{array}{ll} & f'(x) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{x}{1-x} \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{x-1+x}{1-x} \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{2x-1}{1-x} \geqslant 0 \end{array}$$

  On termine donc l'étude par un tableau :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$2x-1$	||	$-$	0	$+$	||
$1-x$	||	$+$		$+$	||
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	||
f	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	||

- Conclusion
  Ce tableau prouve que : pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) \geqslant 0$.
  C'est-à-dire que : $\boxed{\forall x \in]0,1[\,,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}}$

Exercice 3 (Correction dans les grandes lignes)

Rapidement au brouillon, on commence par vérifier que les deux fonctions sont bien définies, ce qui ne coule pas tout à fait de source. On le fait parce que ça nous permet de commencer à nous approprier l'exercice. C'est important.

1. On justifie de la dérivabilité puis on calcule. On trouve :
   $g'(x) = ab\ln\left(\dfrac{1+bx}{1+ax}\right)$
   Or, $0 < a \leqslant b$ donc $0 < 1+ax \leqslant 1+bx$ donc $1 \leqslant \dfrac{1+bx}{1+ax}$ donc $0 \leqslant g'(x)$.
   D'où :

x	0	$+\infty$
g	0 $\nearrow$	

2. On justifie de la dérivabilité puis on calcule. On trouve :
   $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\ln(1+bx)^2\,(1+ax)\,(1+bx)}$
   Ceci prouve que f est strictement croissante sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$.
3. $0 < a \leqslant b$ donc $0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.
   Donc, d'après la question précédente, $f\left(\dfrac{1}{b}\right) \leqslant f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.
   On obtient la réponse en transformant l'inégalité précédente.

Exercice 4

Fait en classe.

Exercice 5 (Dans les grandes lignes)

- Ensemble de définition
  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]-1\,,\,+\infty\,[$.

- Parité, imparité, périodicité
  A cause de son ensemble de définition, f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

- Variations
  Par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur D.
  Tous calculs faits, on trouve : $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{(x+1)^2}\ \exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.
  D'où le tableau :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-1		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	$f(-2-\sqrt{3})$	↘	‖	↘	$f(-2+\sqrt{3})$	↗	

- Limites
  Tout d'abord, à l'aide d'une factorisation, on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$
  On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x-1}{x+1} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} \exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 0$

  $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} \exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = +$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

- Représentation graphique
  Pour tracer, on calcule les valeurs approchées utiles :
  $-2-\sqrt{3} \simeq -3,7$, $-2+\sqrt{3} \simeq -0,3$, $f(-2-\sqrt{3}) \simeq -21$ et $f(-2+\sqrt{3}) \simeq -0,05$.
  On commence par placer les deux tangentes horizontales et l'asymptote verticale.
  Si votre calculatrice ne vous permet pas une bonne visualisation, n'hésitez pas à aller voir sur Geogebra en ligne ou à venir me demander.

Dérivées partielles

Exercice 6 (Correction complète)

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}f(x,y) = y^2 + 2yx$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}f(x,y) = 2xy + x^2$

2. Pour cette fonction, se poserait la question de l'ensemble de définition.
   Il y a des valeurs interdites (tous les couples (x, y) pour lesquels $x = -y$).
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}f(x,y) = \dfrac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}f(x,y) = \dfrac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}f(x,y) = y^2 \exp\left(xy^2\right)$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}f(x,y) = 2xy \exp\left(xy^2\right)$

Exercice 7

Sera fait en classe.

Primitives et intégrales

Exercice 8 (Correction dans les grandes lignes)

A chaque fois, il est sous-entendu qu'on se place sur un intervalle où la fonction est définie. Par ailleurs, par continuité, chacune de ses fonctions admet bien des primitives.

1. Forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto \ln(x)$
   Une primitive est donc $F : x \mapsto \ln \Big| \ln(x) \Big|$
   Toujours penser à la valeur absolue.

2. Forme $u'u^n$ avec $u : x \mapsto (x^2 - 1)$ et $n = -3$ (à un facteur 2 près)
   Une primitive est donc $F : x \mapsto -\dfrac{1}{4}\,(x^2 - 1)^{-2}$

3. Forme $u'e^u$ avec $u : x \mapsto x^2 - 2x$ (à un facteur 2 près)
   Une primitive est donc $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}\,e^{x^2-2x}$

4. Forme $u'u^n$ avec $u : x \mapsto x^2 + 1$ et $n = 5$ (à un facteur 2 près)
   Une primitive est donc $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(x^2+1)^6}{6}$

5. Pas de façon astucieuse... On développe le polynôme via la formule du binôme de Newton.
   Une primitive est $F : x \mapsto \dfrac{1}{9}x^9 - \dfrac{4}{7}x^7 + \dfrac{6}{5}x^5 - \dfrac{4}{3}x^3 + x$

6. Soit on procède comme la question 5, soit on procède par intégration par parties.
   Une primitive est $F : x \mapsto \dfrac{(x+3)(x-1)^5}{5} - \dfrac{1}{30}\,(x-1)^6$

Exercice 9

On pose $f : x \mapsto \cos(2x)\,\sin^3(x)$.
Tout d'abord, f est continue sur $[0,\pi]$ donc l'intégrale existe.
Soit $x \in [0,\pi]$. On linéarise :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= -\frac{1}{2^4\,i}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right) \\
&= -\frac{1}{2^4\,i}\left(e^{5ix}-3e^{3ix}+3e^{ix}-e^{-ix}+e^{ix}-3e^{-ix}+3e^{-3ix}-e^{-5ix}\right) \\
&= -\frac{1}{8} \times \frac{1}{2i}\Big(2i\sin(5x)-3\times 2i\,\sin(3x)+4\times 2i\,\sin(x)\Big) \\
&= -\frac{1}{8}\,\sin(5x)+\frac{3}{8}\,\sin(3x)-\frac{1}{2}\sin(x)
\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(2x)\,\sin^3(x)\,dx &= \int_0^\pi -\frac{1}{8}\,\sin(5x)+\frac{3}{8}\,\sin(3x)-\frac{1}{2}\sin(x)\,dx \\
&= \Big[-\frac{1}{8}\times\Big(-\frac{1}{5}\Big)\cos(5x)-\frac{1}{8}\cos(3x)+\frac{1}{2}\cos(x)\Big]_0^\pi \\
&= \frac{1}{40}\,(-1-1)-\frac{1}{8}\,(-1-1)+\frac{1}{2}\,(-1-1) \\
&= -\frac{1}{20}+\frac{1}{4}-1 \\
&= -\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Exercice 10 (Correction dans les grandes lignes)

A chaque fois, il est sous-entendu qu'on se place sur un intervalle où la fonction est définie. Par ailleurs, par continuité, chacune de ses fonctions admet bien des primitives.

1. $F(x) = (x-1)\sin(x) + \cos(x)$
2. $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$
3. $F(x) = xe^x - e^x$
4. $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$
5. $F(x) = \dfrac{x^3}{3}(1-\ln(x)) + \dfrac{1}{9}x^3$
6. *Fait en classe.*

Exercice 11 (Correction dans les grandes lignes)

A chaque fois, par continuité de la fonction intégrée sur l'intervalle d'intégration, l'intégrale existe.

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}}\,du = \cdots = 2(\sqrt{2}-1)$
2. *Fait en classe.*
3. $I = \displaystyle\int_0^1 u^2(1-u^2)\,du = \cdots = \frac{2}{15}$

Exercice 12 (Correction dans les grandes lignes)

Pour une gaz parfait, $PV = nRT$ donc $P = \dfrac{nrT}{V}$ et donc $-PdV = -\dfrac{nRT}{V}\,dV$
Mathématiquement, il est sous-entendu qu'on a une fonction $f : V \mapsto -\dfrac{nRT}{V}$ (n, R et T étant supposés constants)

Par ailleurs, le travail total est la "somme infinie" des travaux élémentaires.
Cela rejoint la définition historique de l'intégrale somme "aire sous la courbe".
Ainsi, pour calculer le travail total, on intègre la fonction f de V_1 à V_2.

$$\begin{aligned}
W_{tot} &= \int_{V_1}^{V_2} -\frac{nRT}{V}\,dV \\
&= -nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\,dV \\
&= -nRT\Big[\ln(V)\Big]_{V_1}^{V_2} \\
&= -nRT\Big(\ln(V_1) - \ln(V_2)\Big) \\
&= -nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)
\end{aligned}$$