Equations différentielles linéaires

EDL à coefficients constants

Exercice 1

1. Résoudre $(E) : y' - 2y = 2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre $(E) : y'' + 4y' + 4y = 8$ sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre $(E) : y'' - 2y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'unique fonction y définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y'' + y' - 2y = 6$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = -3$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 3y = 9$
2. $y'' + 4y' + 5y = -10$
3. $y'' + 5y' - 6y = 3$
4. $y'' - 6y' + 9y = 6$

Exercice 3 - Datation au carbone 14

On souhaite dater un organisme mort au carbone 14. On modélise la situation de la façon suivante :

- On note $t > 0$ le temps écoulé depuis la mort de l'organisme.
- On note $N(t)$ la quantité de noyaux de carbone 14 présents dans l'organisme à l'instant t.
- On note λ la constante associée à la décomposition du carbone 14.

N vérifie alors l'équation différentielle :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$$

1. Exprimer $N(t)$ en fonction de t et de $N(0)$
2. On appelle temps de demi-vie la durée nécessaire pour que la quantité de noyaux radioactifs initialement présente soit divisée par 2. Pour le Carbone 14, le temps de demi-vie est de 5734 années.
   Déterminer λ.
3. Expliquer le principe de datation au carbone 14.

Exercice 4 - Cinétique chimique

Dans un TP de chimie, on étudie la vitesse de disparition d'un réactif A et on constate qu'elle est proportionnelle à sa concentration. Ainsi, la concentration $[A]$ (exprimée en $mol.L^{-1}$) vérifie l'équation différentielle :

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]$$

Sachant qu'au bout de 15 minutes la concentration a été divisée par 2, déterminer la valeur de k.

Exercice 5 - Oscillateur harmonique

Un équation fréquemment rencontrée en physique est celle de l'oscillateur harmonique, à savoir :

$$(E) \ : \ y'' + \omega^2 y = c$$

où $c \in \mathbb{R}$ et $\omega \in]0, +\infty[$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. On se place dans le cas où les conditions initiales sont $y(0) = y_0$ (réel fixé) et $y'(0) = 0$.
   Déterminer l'unique solution y de (E) compatible avec ces conditions initiales.

Exercice 6

Soit $\omega \in]0, +\infty[$.

Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont de la forme :

$$t \mapsto r \cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

Exercice 7 - Circuits RLC

Dans un exercice de physique, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = E_0$$

Dans cette équation :

- u est une fonction de la variable $t \in [0, +\infty[$
- R, L, C et E_0 sont des constantes exprimées en u.s.i.

On pose $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Dans cet exercice, on prend $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

1. Ecrire l'équation différentielle en n'utilisant que le paramètre ω.
2. Trouver toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle dans ce cas.
3. Vue la situation physique étudiée, on prend comme condition initiales $u(0) = u'(0) = 0$.
   En déduire u.
4. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$.

Exercice 8

Au détour d'un cours de physique-chimie, vous rencontrez le résultat :

$$dT/dt + hST/C = hST_{th}/C$$

Que faites-vous ?

EDL

Exercice 9

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(E)\ :\ y' - \dfrac{t}{1-t^2}\, y = \dfrac{t}{1-t^2}$ sur $I =]\,1\,,\,+\infty\,[$
2. $(E)\ :\ y' + y\tan(t) = \cos^2(t)$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right[$
3. $(E)\ :\ y' + y = t^2 + t + 1$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $(E)\ :\ t(t+1)y' - (2+t)y = 2t$ sur $I =]\,0\,,\,+\infty\,[$

Exercice 10

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 9y = \sin(3x)$$

On cherchera une solution particulière de cette équation de la forme $x \mapsto \lambda x\cos(3x) + \mu x\sin(3x)$ où λ et μ sont deux réels à déterminer.

Exercice 11

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 2y = 2x^2$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$.

On cherchera une solution particulière qui soit polynomiale de degré 2.

Exercice 12

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 5y' + 4y = t + \cos(t)$$

1. Résoudre (E_0) : $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Déterminer une solution particulière de (E_1) :

   $$y'' + 5y' + 4y = t$$

   On cherchera cette solution sous la forme d'un polynôme.
3. Déterminer une solution particulière de (E_2) :

   $$y'' + 5y' + 4y = \cos(t)$$

   .

   On cherchera cette solution sous la forme $t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$.
4. Résoudre (E).

Exercice 13

On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y' - 6y = e^{-2x} + \cos(x)$$

1. (a) Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_1) :

   $$y'' - y' - 6y = e^{-2x}$$

   On cherchera une telle solution sous la forme $x \mapsto P(x)e^{-2x}$ où P est un polynôme de degré 1.

   (b) Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_2) :

   $$y'' - y' - 6y = \cos(x)$$

   On cherchera une telle solution sous la forme $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.
2. Conclure.

Approfondissement

Exercice 14 - Equation fonctionnelle

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'' - y' + y = 0$.
2. On veut déterminer les fonctions $f :]\,0\,,\,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

   $$(E_2)\ :\ \forall x \in]\,0\,,\,+\infty\,[\,,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

   (a) On suppose que f est une solution de (E_2).
   On définit alors la fonction $g : t \mapsto f(e^t)$.
   Montrer que g est solution de (E_1).

   (b) Trouver toutes les fonctions f vérifiant (E_2).

Exercice 15 - Système d'EDL

Soit ω un réel strictement positif.
On considère le système :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x' = \omega y \\ y' = -\omega x \end{array}\right.$$

Résoudre (S) avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.

Exercice 16 - Modèle d'évolution

On peut modéliser l'évolution d'une population à l'aide de la fonction logistique N (issue du modèle de Verhulst) définie par l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ N' = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N \text{ et } N(0) = N_0 > 0$$

où $r > 0$ est le taux de croissance et $K > 0$ est la capacité d'accueil.

1. Quelles sont les solutions constantes de (E) ?
2. On pose $y = \dfrac{1}{N}$. Montrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire.
3. En déduire une expression de N ainsi que la limite de $N(t)$ en $+\infty$.
4. On suppose que $N_0 \in]\,0\,,\,K\,[$.

   (a) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $N(t) \in]\,0\,,\,K\,[$.

   (b) En revenant à l'équation différentielle, montrer que N est croissante.
5. Que dire si $N_0 > K$?