# Fiche n° 27. Équations différentielles

## Réponses

27.1 a) ... $\boxed{x \mapsto 56e^{12x}}$

27.1 b) ... $\boxed{x \mapsto 6e^{x} - 1}$

27.1 c) ... $\boxed{x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}}$

27.1 d) ... $\boxed{x \mapsto 9e^{2x} - 6}$

27.2 a) ... $\boxed{x \mapsto e^{(6-x)/5}}$

27.2 b) ... $\boxed{x \mapsto 1 - 2e^{-2x/7+2}}$

27.2 c) ... $\boxed{x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}}$

27.2 d) ... $\boxed{x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}}$

27.3 a) ... $\boxed{x \mapsto e^{2x}}$

27.3 b) ... $\boxed{x \mapsto e^{x}}$

27.3 c) ... $\boxed{x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}}$

27.4 a) ... $\boxed{x \mapsto e^{x}}$

27.4 b) ... $\boxed{x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}}$

27.4 c) ... $\boxed{x \mapsto \dfrac{4}{3}e^{x} - \dfrac{1}{3}e^{-2x}}$

27.4 d) ... $\boxed{x \mapsto (2-x)e^{x}}$

27.4 e) ... $\boxed{x \mapsto \left(4x + \dfrac{3}{2}\right)e^{-2x} + \dfrac{1}{2}}$

27.4 f) ... $\boxed{x \mapsto (2-x)e^{2-2x}}$

27.5 a) ... $\boxed{x \mapsto \cos(x) + 2\sin(x)}$

27.5 b) ... $\boxed{x \mapsto 2\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x) - 1}$

27.5 c) ... $\boxed{x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)}$

27.5 d) ... $\boxed{x \mapsto e^{-x}\sin(x)}$

27.6 a) ... $\boxed{y : t \mapsto y_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$

27.6 b) ... $\boxed{y : t \mapsto y_0\cos(\omega(t-t_0))}$

## Corrigés

**27.1 a)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 12y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{12x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{12x}$.

Alors, $y_0(0) = 56 = \lambda$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 56e^{12x}$.

---

**27.1 b)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si $\mu$ est une solution particulière constante, alors $0 = \mu + 1$ soit $\mu = -1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} - 1$. Alors, $y_0(0) = 5 = \lambda - 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 6e^{x} - 1$.

---

**27.1 c)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si $\mu$ est une solution particulière constante, alors $0 = 3\mu + 5$ soit $\mu = -5/3$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{3x} - 5/3$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda - 5/3$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}$.

---

**27.1 d)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si $\mu$ est une solution particulière constante, alors $0 = 2\mu + 12$ soit $\mu = -6$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{2x} - 6$.

Alors, $y_0(0) = 3 = \lambda - 6$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 9e^{2x} - 6$.

---

**27.2 a)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation est homogène et son ensemble de solutions est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x/5},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x/5}$.

Alors, $y_0(1) = e = \lambda e^{-1/5}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto e^{(6-x)/5}$.

**27.2 b)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{2}{7}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x/7},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si $\mu$ est une solution particulière constante, alors $0 + 2\mu = 2$ soit $\mu = 1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-2x/7} + 1$. Alors, $y_0(7) = -1 = \lambda e^{-2} + 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto -2e^{-2x/7+2} + 1$.

**27.2 c)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \sqrt{5}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si $\mu$ est une solution particulière constante, alors $0 - \sqrt{5}\mu = 6$ soit $\mu = -\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Alors, $y_0(0) = \pi = \lambda - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

**27.2 d)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \pi y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\pi x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si $\mu$ est une solution particulière constante, alors $0 = \pi\mu + 2e$ soit $\mu = -\dfrac{2e}{\pi}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\pi x} - \dfrac{2e}{\pi}$. Alors, $y_0(\pi) = 12 = \lambda e^{\pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

**27.3 a)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 2$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{2x}$.

**27.3 b)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

**27.3 c)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}$.

**27.4 a)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont $-1$ et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - \mu = 1$. En additionnant et soustrayant ces relations, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

**27.4 b)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont $-1$ et $-2$ (car $-1 - 2 = -3$ et $(-2) \cdot (-1) = 2$ et on reconnaît $r^2 - (-2-1)r + (-2) \cdot (-1)$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 2$ et $y'(0) = -\lambda - 2\mu = 3$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 2$ et $-\mu = 5$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$.

**27.4 c)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme vaut 9 et ses racines sont $-2$ et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - 2\mu = 2$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $-3\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$.

**27.4 d)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont la racine double est 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^x$.

Alors, $\lambda = 2$ et $\lambda + \mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - x)e^x$.

**27.4 e)** On note $y_0$ l'unique solution.

L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont l'unique solution est $-2$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-2x}\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

de plus $x \longmapsto \frac{1}{2}$ est une solution de l'équation différentielle, il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-2x} + \frac{1}{2}$.

les conditions initiales donnent $\mu + \frac{1}{2} = 2$ et $\lambda - 2\mu = 1$, et ainsi, $y_0 : x \mapsto \left(4x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x} + \frac{1}{2}$.

**27.4 f)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont la racine double est $-2$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x}$.

Alors, $y(1) = (\lambda + \mu)e^{-2} = 1$ et $y'(1) = (-2\lambda + \mu - 2\mu)e^{-2} = -3$. Le système s'écrit $\lambda + \mu = e^2$ et $2\lambda + \mu = 3e^2$. Il se réduit en $\lambda + \mu = e^2$ et $\lambda = 2e^2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - x)e^{2-2x}$.

**27.5 a)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont i et $-$i. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = 2 = \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \cos(x) + 2\sin(x)$.

**27.5 b)** On note $y_0$ l'unique solution.

L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 4 = 0$ dont les solutions sont 2i et $-2$i. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

de plus $x \longmapsto -1$ est une solution de l'équation différentielle,

il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) - 1$.

les conditions initiales donnent $\lambda - 1 = 1$ et $2\mu = 1$, et ainsi, $y_0 : x \mapsto 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) - 1$.

**27.5 c)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$.

Les résultats sur les racines de l'unité assurent que les solutions de cette équation sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = -1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

**27.5 d)** Notons $y_0$ l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut $-1$ et ses racines sont $-1 - \mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))$.

Alors, $y_0(0) = 0 = \lambda$ et $y_0'(0) = 1 = -\lambda + \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$.

........................................................................................................................................

**27.6 b)** L'équation caractéristique : $x^2 + \omega^2 = 0$ a pour solutions $\mathrm{i}\omega$ et $-\mathrm{i}\omega$. Donc il existe $\lambda$ et $\mu$ tels que : $y(t) = \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$

On cherche l'unique fonction de cette forme qui vérifie $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = 0$.

La fonction $t \mapsto y_0\cos(\omega(t - t_0))$ possède ces trois propriétés caractéristiques, elle est donc la solution.

........................................................................................................................................

# Fiche n° 28. Equations différentielles

## Réponses

28.1 a) ............ $\boxed{t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}}$

28.1 b) ............ $\boxed{t \longmapsto 1}$

28.1 c) ............ $\boxed{t \longmapsto t^2 - 2 + 3\,e^{-\frac{t^2}{2}}}$

28.2 a) ............ $\boxed{t \longmapsto \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)}$

28.2 b) ............ $\boxed{t \longmapsto (t+1)e^t}$

28.2 c) ............ $\boxed{t \longmapsto \frac{1}{2}\left(e^t + \cos(t) + \sin(t)\right)}$

28.2 d) ............ $\boxed{t \longmapsto \frac{1}{4}(2t+3)e^t + \frac{1}{4}e^{-t}}$

28.3 a) ............ $\boxed{x \longmapsto \frac{3}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}}$

28.3 b) ............ $\boxed{t \longmapsto t - 2 + e^{1-t}}$

28.3 c) ............ $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}x - \frac{1}{3x^2}}$

28.3 d) ............ $\boxed{x \longmapsto \ln(x) \cdot \ln\left(-\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)}$

28.4 a) ............ $\boxed{x \longmapsto -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$

28.4 b) ............ $\boxed{x \longmapsto 3x^2 - 10x + 21}$

28.4 c) ............ $\boxed{x \longmapsto -\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{17}{9}}$

28.4 d) ............ $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}}$

28.4 e) ............ $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}}$

28.4 f) ............ $\boxed{x \longmapsto \frac{5}{12}x^4 - \frac{5}{9}x^3 + \frac{1}{18}x^2 + \frac{44}{27}x}$

## Corrigés

**28.1 a)** On note $f$ la solution. $f$ vérifie $y' + t\,y = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = ke^{-\frac{t^2}{2}}$

de plus $f(0) = 1$ donc $f$ est la fonction $t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$

---

**28.1 b)** On note $f$ la solution.

$t \mapsto 1$ est une solution de $y'(t) + t\,y(t) = t$ et les solutions de $y'(t) + t\,y(t) = 0$ vérifient $\exists k \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = ke^{-\frac{t^2}{2}}$
donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = ke^{-\frac{t^2}{2}} + 1$

de plus $f(0) = 1$ donc $f$ est la fonction $t \longmapsto 1$

---

**28.1 c)**

Les solutions de $y'(t) + t\,y(t) = 0$ vérifient $\exists k \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = ke^{-\frac{t^2}{2}}$.
Pour trouver une solution particulière on utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $t \longmapsto k(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$, ce qui nous amène à trouver une primitive de $t \longmapsto t^3e^{\frac{t^2}{2}}$.
On trouve ainsi que $t \longmapsto t^2 - 2$ est une solution de $y'(t) + t\,y(t) = t^3$

En notant $f$ la solution on sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t^2 - 2 + ke^{-\frac{t^2}{2}}$

de plus $f(0) = 1$ ce qui donne $k = 3$. En conclusion $f$ est la fonction $t \longmapsto t^2 - 2 + 3e^{-\frac{t^2}{2}}$

---

**28.2 a)** On note $f$ la solution.

On remarque que $t \mapsto \frac{1}{2}e^t$ est une solution de $y'(t) + y(t) = e^t$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2}e^t + ke^{-t}$

de plus $f(0) = 1$ donc $f$ est la fonction $t \longmapsto \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$

---

**28.2 b)** En cherchant une solution sous la forme $t \mapsto ate^t$ on trouve que $t \mapsto te^t$ est une solution de $y'(t) - y(t) = e^t$.

La solution $f$ vérifie : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = te^t + ke^t$

de plus $f(0) = 1$ donc $f$ est la fonction $t \longmapsto (t+1)e^t$

**28.2 c)** On note $f$ la solution.

On remarque que $t \mapsto \dfrac{1}{2}e^t$ est une solution de $y''(t) + y(t) = e^t$

donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{2}e^t + a\cos(t) + b\sin(t)$

de plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ nous donne $a = b = \dfrac{1}{2}$ donc $f$ est la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\big(e^t + \cos(t) + \sin(t)\big)$

**28.2 d)** En cherchant une solution sous la forme $t \mapsto ate^t$ on trouve que $t \mapsto \dfrac{1}{2}te^t$ est une solution de $y''(t) - y(t) = e^t$.

La solution $f$ vérifie : il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{2}te^t + ae^t + be^{-t}$

de plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ nous donne $a = \dfrac{3}{4}$ et $b = \dfrac{1}{4}$ donc $f$ est la fonction $\longmapsto \dfrac{1}{2}te^t + \dfrac{3}{4}e^t + \dfrac{1}{4}e^{-t}$

**28.3 a)** On remarque que $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}$ est une solution particulière.

Sur $I = \mathbb{R}$, $\quad y'(x) = x + 2xy(x) \iff y'(x) - 2xy(x) = x \iff \exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\quad y(x) = -\dfrac{1}{2} + ke^{x^2}$

de plus $y(0) = 1$ donne $k = \dfrac{3}{2}$. $\quad$ La solution est la fonction $\longmapsto \dfrac{3}{2}e^{x^2} - \dfrac{1}{2}$

**28.3 b)** On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme du premier degré et on trouve que $t \longmapsto t-2$ est une solution de $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t$.

Les solutions de $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$ vérifient : il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in \mathbb{R},\quad y(t) = (at+b)e^{-t}$

La solution $f$ vérifie : il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t - 2 + (at+b)e^{-t}$

et enfin $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$ permet de conclure : $\quad$ La solution est la fonction $t \longmapsto t - 2 + e^{1-t}$

**28.3 c)** Sur $I = ]0; +\infty[$, $\quad x^3y'(x) - x^2y(x) = 1 \iff y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Les solutions de $y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = 0$ vérifient : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\quad y(x) = kx$.

La méthode de variation de la constante permet de trouver la solution particulière : $x \longmapsto -\dfrac{1}{2x^2}$

Les solutions de $y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = \dfrac{1}{x^3}$ vérifient : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\quad y(x) = kx - \dfrac{1}{2x^2}$.

et enfin $y(1) = 0$ permet de conclure : $\quad$ La solution est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3x^2}$

**28.3 d)** Sur $I = ]0; 1[$, $\quad x\ln(x)y'(x) - y(x) = \ln(x) \iff y'(x) - \dfrac{1}{x\ln(x)}y(x) = \dfrac{1}{x}$.

On remarque que ln est une solution non nulle de $y'(x) - \dfrac{1}{x\ln(x)}y(x) = 0$ donc l'ensemble des solutions de cette équation homogène est $\big\{x \longmapsto k\ln(x) \mid k \in \mathbb{R}\ \big\}$

La méthode de variation de la constante permet de trouver la solution particulière : $x \longmapsto \ln(x) \times \ln(-\ln(x))$

Les solutions de $y'(x) - \dfrac{1}{x\ln(x)}y(x) = \dfrac{1}{x}$ vérifient : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in ]0,1[,\quad y(x) = k\ln(x) + \ln(x) \times \ln(-\ln(x))$.

et enfin $y(1/2) = 0$ permet de conclure :

La solution est la fonction $x \longmapsto -\ln(x) \times \ln(\ln(2)) + \ln(x) \times \ln(-\ln(x))$

**28.4 a)** L'étude du degré d'une solution polynomiale $P$ permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 1$.

Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on note $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P(x) = ax + b$,

$P$ solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad a - 2(ax+b) = x \iff -2a = 1$ et $a - 2b = 0$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

**28.4 b)** L'étude du degré d'une solution polynomiale $P$ permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

$P$ solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 2(2ax+b) + ax^2 + bx + c = 3x^2 + 2x + 1 \iff a = 3 \ ,\ 4a + b = 2$ et $2b + c = 1$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto 3x^2 - 10x + 21$

**28.4 c)** L'étude du degré d'une solution polynomiale $P$ permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

$P$ solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 2a - 3(ax^2 + bx + c) = x^2 - 3x + 5 \iff -3a = 1 \ ,\ -3b = -3$ et $2a - 3c = 5$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto -\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{17}{9}$

**28.4 d)** L'étude du degré d'une solution polynomiale $P$ permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

$P$ solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 8a + 3(2ax+b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x \iff 2a = 1 \ ,\ 6a + 2b = 2$ et $8a + 3b + 2c = 0$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

**28.4 e)** L'étude du degré d'une solution polynomiale $P$ permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

$P$ solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 2a + 3(ax^2 + bx + c) = x^2 \iff 3a = 1 \ ,\ 3b = 0$ et $2a + 3c = 0$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}$

**28.4 f)** L'étude du degré d'une solution polynomiale $P$ permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 4$.

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on note $(a,b,c,e) \in \mathbb{R}^5$ tel que $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$,

$P$ solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad (12ax^2 + 6bx + 2c) + 3(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) = 5x^3 - 3x + 5$

$\iff 12a = 5 \ ,\ 12a + 9b = 0 \ ,\ 6b + 6c = -3$ et $2c + 3d = 5$

On en déduit qu'une des solutions polynomiales est $P : x \longmapsto \frac{5}{12}x^4 - \frac{5}{9}x^3 + \frac{1}{18}x^2 + \frac{44}{27}x$