

## Équations différentielles

### Prérequis

Équations différentielles à coefficients constants.

*A la suite du cours de 1ère année.*

## Équations d'ordre 1 à coefficients constants

### Calcul 27.1



Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a)  $y' = 12y$  et  $y(0) = 56$  .....

b)  $y' = y + 1$  et  $y(0) = 5$  .....

c)  $y' = 3y + 5$  et  $y(0) = 1$  .....

d)  $y' = 2y + 12$  et  $y(0) = 3$  .....

### Calcul 27.2



Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a)  $5y' = -y$  et  $y(1) = e$  .....

b)  $7y' + 2y = 2$  et  $y(7) = -1$  .....

c)  $y' - \sqrt{5}y = 6$  et  $y(0) = \pi$  .....

d)  $y' = \pi y + 2e$  et  $y(\pi) = 12$  .....

## Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

### Calcul 27.3 — Une équation avec plusieurs conditions initiales.



Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....

b)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$  .....

c)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 3$  .....

**Calcul 27.4 — Racines doubles, racines simples.**



Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

- a)  $y'' - y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$  .....
- b)  $y'' + 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 3$  .....
- c)  $y'' + y' - 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....
- d)  $y'' - 2y' + y = 0$  et  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 1$  .....
- e)  $y'' + 4y' + 4y = 2$  et  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 1$  .....
- f)  $y'' + 4y' + 4y = 0$  et  $y(1) = 1$  et  $y'(1) = -3$  .....

**Calcul 27.5 — Racines complexes.**



Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

- a)  $y'' + y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....
- b)  $y'' + 4y = -4$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$  .....
- c)  $y'' + y' + y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -1$  .....
- d)  $y'' + 2y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$  .....

**Avec des paramètres**

**Calcul 27.6**



Déterminer l'expression de la solution  $y(t)$  des problèmes différentiels suivants en fonction des différentes constantes.

- a)  $\tau y'(t) + y(t) = 0$  et  $y(t_0) = y_0$  en fonction des constantes  $t_0, y_0$  et  $\tau \neq 0$ .  
.....
- b)  $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$  et  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = 0$  en fonction des constantes  $t_0, y_0$  et  $\omega > 0$ .  
.....

**Réponses mélangées**

$$\begin{array}{ccccccc}
 x \mapsto 6e^x - 1 & x \mapsto 2e^{2x} - e^x & x \mapsto \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}} & x \mapsto (2-x)e^{2-2x} \\
 x \mapsto \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x} & x \mapsto \left(12 + \frac{2c}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \frac{2c}{\pi} & x \mapsto e^{-x} \sin(x) \\
 y : t \mapsto y_0 \cos(\omega(t - t_0)) & x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x} & x \mapsto 1 - 2e^{-2x/7+2} \\
 y : t \mapsto y_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} & x \mapsto e^{2x} & x \mapsto e^{(6-x)/5} & x \mapsto \frac{8e^{3x} - 5}{3} & x \mapsto e^x & x \mapsto e^x \\
 x \mapsto e^{-x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}\right) & x \mapsto 2 \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) - 1 & x \mapsto \cos(x) + 2 \sin(x) \\
 x \mapsto \left(4x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x} + \frac{1}{2} & x \mapsto (2-x)e^x & x \mapsto 9e^{2x} - 6 & x \mapsto 56e^{12x}
 \end{array}$$