DM5 - Pour le jeudi 19 décembre 2024

Exercice 1

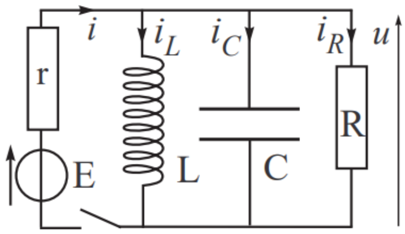
On définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3 puis exprimer A^3 comme une combinaison linéaire de A^2 et A.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A + b_n A^2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de a_n et b_n en fonction de n .

Exercice 2

Un ami physicien souhaite étudier le circuit électrique suivant :



Sur ce schéma, les grandeurs E, r, L, C et R sont des constantes réelles strictement positives exprimées en u.s.i.
Ses connaissances en électricité le conduise à démontrer que :

$$-\frac{1}{r}\frac{du}{dt} = \frac{u}{L} + \frac{1}{R}\frac{du}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2}$$

Dans cette équation, u est une fonction de la variable $t \in [0, +\infty[$.

1. Votre ami physicien vous suggère de poser $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $R_e = \dfrac{Rr}{R+r}$ et de définir α tel que $\dfrac{1}{R_e C} = 2\,\alpha\,\omega_0$.
   Démontrer que l'équation différentielle précédente est alors équivalente à :
   $$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\,\alpha\,\omega_0\,\frac{du}{dt} + \omega_0^2\,u = 0$$
2. Votre ami physicien effectue quelques calculs au brouillon et vous indique que, pour le circuit qui l'intéresse, $\alpha = 1$.
   De plus, par un raisonnement qui lui semble évident, votre ami vous garantit que $u(0) = 0$ et $\dfrac{du}{dt}(0) = \dfrac{E}{r\,C}$.
   Déterminer l'expression de $u(t)$ en fonction de $t \in [0, +\infty[$ et des données du problème.