Equations différentielles linéaires

EDL à coefficients constants

Exercice 1 (Grandes lignes)

1. *Fait en classe.*
2. Il faut trouver $y(t) = (K_1\, t + K_2)e^{-2t} + 2$
3. Il faut trouver $y(t) = (K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t))e^{t}$ (l'équation est homogène)
4. *Fait en classe.*

Exercice 2 (Seulement les réponses)

1. L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & Ke^{3t} - 3 \end{array} \quad \middle| \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$

2. L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \Big(K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t)\Big)e^{-2\,t} - 2 \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

3. L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & K_1\, e^{t} + K_2 e^{-6\,t} - \dfrac{1}{2} \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

4. L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \Big(K_1\, t + K_2\Big)e^{3\,t} + \dfrac{2}{3} \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 3 (Correction complète... si on est dans une copie d'une autre matière)

1. N est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
   On obtient : $\boxed{\text{pour tout } t \in]\,0\,, +\infty\,[\,,\ N(t) = N(0)e^{-\lambda\, t}}$.
2. On va exprimer λ en années^{-1}.
   Pour déterminer λ, on résout :

$$\begin{array}{rl} & N(5734) = \dfrac{N(0)}{2} \\ \Leftrightarrow & N(0)e^{-\,5734\,\lambda} = \dfrac{N(0)}{2} \\ \Leftrightarrow & \lambda = \dfrac{\ln(2)}{5734} \end{array}$$

   Ainsi, $\boxed{\lambda = \dfrac{\ln(2)}{5734} \text{ années}^{-1}}$.
3. On obtient la formule suivante, valable pour tout $t \in]\,0\,, +\infty\,[$: $N(t) = N(0)\, e^{-\frac{\ln(2)}{5734}\, t}$
   Dans cette formule :
   - $N(t)$ est connu : on mesure cette grandeur sur l'organisme mort que l'on souhaite dater
   - $N(0)$ est connu : cette grandeur est connue de façon théorique
   - t est donc la seule grandeur inconnue : on peut la calculer en isolant t dans la formule

Exercice 4 (Grandes lignes)

$[A](t) = [A]_0 e^{-kt}$

De plus, on convertit en secondes pour avoir des unités du système internationale : 15 minutes correspondent à 900 secondes.

Ensuite : $[A]_0 e^{-900k} = \dfrac{[A]_0}{2} \Leftrightarrow k = \dfrac{\ln(2)}{900}\, s^{-1}$

Application numérique : $k \simeq 7,70\,.\,10^{-4}\, s^{-1}$

Exercice 5 (Correction complète)

1. • Equation caractéristique

   On commence par résoudre $x^2 + \omega^2 = 0$.

   Pour cette équation, $\Delta = -4\omega^2$ et il y a donc deux solutions complexes conjuguées, qui sont :

$$z_1 = \frac{-2\,i\,\omega}{2} = -i\,\omega \quad \text{et} \quad \overline{z_1} = i\,\omega$$

   • Equation homogène

   L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{rccl} Y & : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto K_1 \cos(\omega\, t) + K_2 \sin(\omega\, t) \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

   • Solution particulière

   L'équation (E) est à coefficients constants. Une solution particulière évidente est donc la fonction $y_0 : t \mapsto \dfrac{c}{\omega^2}$ (possible car $\omega \neq 0$).

   • Conclusion

   L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rccl} y & : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto K_1 \cos(\omega\, t) + K_2 \sin(\omega\, t) + \dfrac{c}{\omega^2} \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$

2. On note y la fonction cherchée.

   y est solution de (E) donc il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = K_1 \cos(\omega\, t) + K_2 \sin(\omega\, t) + \dfrac{c}{\omega^2}$.

   Par les théorèmes opératoires, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

   $y'(t) = -K_1\omega\, \sin(\omega\, t) + K_2\omega \cos(\omega\, t)$.

   Pour déterminer K_1 et K_2, on résout :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y(0) & = & y_0 \\ y'(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} K_1 & & + \dfrac{c}{\omega^2} & = & y_0 \\ & K_2\omega & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} K_1 & = & y_0 - \dfrac{c}{\omega^2} \\ K_2 & = & 0 \qquad (\text{car } \omega \neq 0) \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La fonction cherchée est :} \\ \begin{array}{rccl} y & : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto \left(y_0 - \dfrac{c}{\omega^2}\right) \cos(\omega\, t) + \dfrac{c}{\omega^2} \end{array} \end{array}}$$

Exercice 6 (Correction complète)

Soit y une solution de l'équation différentielle proposée.
D'après l'exercice 5, il existe K_1 et K_2 des réels tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)$.
Cette formule ressemble à une formule que l'on avait croisée dans le chapitre "Nombres complexes".

- <u>Si $(K_1, K_2) = (0,0)$</u>
  Dans ce cas, $r = 0$ et $\varphi = 0$ conviennent.
- <u>Si $(K_1, K_2) \neq (0,0)$</u>
  Dans ce cas, on pose $r = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$
  Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = r\left(\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}} \cos(\omega t) + \frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}} \sin(\omega t) \right)$ (possible car $r \neq 0$)
  Or :
  $\rightarrow \quad -1 \leqslant \frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}} \leqslant 1$
  $\rightarrow \quad -1 \leqslant \frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}} \leqslant 1$
  $\rightarrow \quad \left(\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\right)^2 = 1$
  On peut donc trouver φ un réel tel que $\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}} = \cos(\varphi)$ et $\frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}} = \sin(\varphi)$.
  On obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $y(t) = r\left(\cos(\varphi)\cos(\omega t) + \sin(\varphi)\sin(\omega t) \right) = r\cos(\omega t - \varphi)$
  Quitte à renommer φ en $-\varphi$, on a ce qui qu'on voulait.

Exercice 7 (Grandes lignes)

1. On trouve $(E)\ :\ u'' + 2\omega u' + \omega^2 u = \omega^2 E_0$.
2. L'ensemble des solutions de (E) est :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} u : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(K_1 t + K_2\right)e^{-\omega t} + E_0 \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
3. On trouve :
$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(-(\omega t + 1)e^{-\omega t} + 1\right)E_0 \end{array}$$
4. $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = E_0$

Exercice 8 (Grandes lignes)

On traduit : T est une fonction qui dépend de la variable t et qui vérifie l'équation différentielle :

$$y' + \frac{hS}{C} y = \frac{hs}{C} T_{th}$$

Il faut comprendre que les grandeurs h, S, C et T_{th} sont des constantes, données par l'énoncé.
On trouve $T(t) = Ke^{-\frac{hS}{C} t} + T_{th}$

EDL

Exercice 9 (Correction rapide)

1. • Equation homogène

   On commence par résoudre $y' - \dfrac{t}{1-t^2}y = 0$ sur I.

   $a : t \mapsto -\dfrac{t}{1-t^2}$ est continue donc admet des primitives sur I.

   De plus, pour tout $t \in \text{I}$, $a(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{-2t}{1-t^2}$.

   On peut donc prendre comme primitive $A : t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|1-t^2\right|$

   Enfin, pour tout $t \in \text{I}$, on a :

   $$\begin{aligned} e^{-A(t)} &= \exp\Big(-\frac{1}{2}\ln\left|1-t^2\right|\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{1}{2}\ln t^2-1\Big) \qquad \text{(car } t \in \text{I)} \\ &= \exp\Big(-\ln(\sqrt{t^2-1})\Big) \\ &= \exp\Big(\ln(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}})\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions de (E_0) est :

   $$\left\{ \begin{array}{cccc} Y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \dfrac{K}{\sqrt{t^2-1}} \end{array} \quad \Big| \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$

   • Solution particulière

   La fonction constante égale à -1 est une solution particulière de (E).

   • Conclusion

   L'ensemble des solutions de (E) est :

   $$\left\{ \begin{array}{cccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \dfrac{K}{\sqrt{t^2-1}} - 1 \end{array} \quad \Big| \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$

2. *Fait en classe.*
3. L'ensemble des solutions de (E) est :

   $$\left\{ \begin{array}{cccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & Ke^{-t} + t^2 - t + 2 \end{array} \quad \Big| \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$

4. L'ensemble des solutions de (E) est :

   $$\left\{ \begin{array}{cccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & K\dfrac{t^2}{1+t} - \dfrac{2t}{1+t} \end{array} \quad \Big| \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 10 (Seulement la réponse)

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & K_1\cos(3x) + K_2\sin(3x) - \dfrac{1}{6}x\cos(3x) \end{array} \quad \Big| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 11 (Seulement la réponse)

On trouve :

$$y \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(x)e^x + (x+1)^2 \end{array}$$

Exercice 12 (Seulement la réponse)

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y \; : \; \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t} + \frac{1}{4}t + \frac{3}{34}\cos(t) + \frac{5}{34}\sin(t) - \frac{5}{16} \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 13 (Seulement la réponse)

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y \; : \; \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & K_1 e^{-2x} + K_2 e^{3x} - \frac{1}{5}\, x\, e^{-2x} - \frac{7}{50}\cos(x) - \frac{1}{50}\,\sin(x) \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Approfondissement

Exercice 14 (Correction complète)

1. - Equation caractéristique
   On commence par résoudre $x^2 - x + 1 = 0$.
   Pour cette équation, $\Delta = -3$ et il y a donc deux solutions complexes conjuguées, qui sont :
   $$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{z_1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$
   - Conclusion
   L'équation est homogène.

   L'ensemble des solutions de (E_1) est :
   $$\left\{ \begin{array}{rcll} y : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ t & \mapsto & \Big(K_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\, t) + K_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\, t)\Big) e^{t/2} & \end{array} \;\middle|\; K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

2. (a) Soit f une fonction solution de (E_2).
   Tout d'abord, par stricte positivité de l'exponentielle, g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   De plus, par les théorèmes opératoires, g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

   Soit $t \in \mathbb{R}$.
   $$g(t) = f(e^t)$$
   $$\begin{aligned} g'(t) &= e^t\, f'(e^t) && \text{(dérivée d'une composée)} \\ &= e^t\, f(e^{-t}) && \text{(car } f \text{ est solution de } (E_2)) \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} g''(t) &= e^t\, f(e^{-t}) \; + \; e^t \times (-e^{-t})\, f'(e^{-t}) \\ &= e^t\, f(e^{-t}) - f(e^t) && \text{(car } f \text{ est solution de } (E_2)) \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} g''(t) - g'(t) + g(t) &= e^t\, f(e^{-t}) - f(e^t) \; - \; e^t\, f(e^{-t}) \; + \; f(e^t) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Si f est solution de (E_2), alors $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution de (E_1).

   (b) - Analyse
   Soit f une fonction solution de (E_2).
   D'après la question 2a, la fonction $g : t \mapsto f(e^t)$ alors solution de (E_1).
   Donc, d'après la question 1, il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$g(t) = \Big(K_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\, t) + K_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\, t)\Big) e^{t/2}$$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. En combinant les informations précédentes, on obtient :
   $$\begin{aligned} f(x) &= g(\ln(x)) && \text{(en posant } x = e^t \text{, c'est-à-dire } t = \ln(x)\,) \\ &= \Big(K_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\,) + K_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\,)\Big) e^{\ln(x)/2} \\ &= \Big(K_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\,) + K_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\,)\Big) \sqrt{x} \end{aligned}$$
   - Synthèse
   On note $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ et on définit la fonction f par :
   $$\begin{array}{rcl} f : \;]\,0\,,+\infty\,[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \Big(K_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\,) + K_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\,)\Big) \sqrt{x} \end{array}$$
   Tout d'abord, par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout $x \in]\,0\,,+\infty\,[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \Big(-K_1\frac{\sqrt{3}}{2\,x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + K_2\frac{\sqrt{3}}{2\,x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x))\Big)\sqrt{x} \\
&\quad +\Big(K_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + K_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x))\Big)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \Big((K_1+\sqrt{3}K_2)\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + (K_2-\sqrt{3}K_1)\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x))\Big)\frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{1}{x}\Big) &= \Big(K_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(\frac{1}{x})) + K_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(\frac{1}{x}))\Big)\sqrt{\frac{1}{x}} \\
&= \Big(K_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)) - K_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x))\Big)\frac{1}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Finalement, par identification :
f est solution de (E_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{K_1+\sqrt{3}K_2}{2} = K_1 \\[2ex] \dfrac{K_2-\sqrt{3}K_1}{2} = -K_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}K_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}K_2 = 0 \\[2ex] -\dfrac{\sqrt{3}}{2}K_1 + \dfrac{3}{2}K_2 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow K_1 = \sqrt{3}K_2$

- Conclusion

L'ensemble des solutions de(E_2) est :

$$\left\{ \begin{array}{cccl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & \Big(\sqrt{3}K_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + K_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x))\Big)\sqrt{x} \end{array} \;\middle|\; K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 15 (Grandes lignes)

En l'absence de résultats théoriques sur la résolution de ce type de système, on procède par analyse-synthèse.

Par ailleurs, on reste conscient que les notations x et y désignent toutes deux des fonctions. C'est souvent le cas en physique quand on étudie le mouvement d'un mobile. La variable sera alors naturellement notée t.

- <u>Analyse</u>
  Soient x et y deux fonctions solutions du système.
  $x'' = \omega\, y' = \omega\,(-\omega\, x)$ d'où $x'' + \omega^2\, x = 0$
  (Puisqu'on dérive l'égalité $x' = \omega\, y$, l'équivalence est perdue ; il est vraiment nécessaire de raisonner par analyse-synthèse.)
  Ainsi, il existe K_1 et K_2 des réels tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = K_1 \cos(\omega\, t) + K_2 \sin(\omega\, t)$
  En prenant en compte les conditions initiales, on trouve que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \dfrac{1}{\omega} \sin(\omega\, t)$.
  Enfin, en utilisant la première égalité du système, on trouve que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \dfrac{1}{\omega} \cos(\omega\, t)$.
- <u>Synthèse</u>
  On pose $x : t \mapsto \dfrac{1}{\omega} \sin(\omega\, t)$ et $y : t \mapsto \dfrac{1}{\omega} \cos(\omega\, t)$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
  On vérifie qu'elles conviennent (et c'est le cas).

Exercice 16 (Grandes lignes)

1. Soit α un réel ; on note f la fonction constante égale à α.
   f est solution de $(E) \;\Leftrightarrow\; \dots \;\Leftrightarrow\; N = 0$ ou $N = K$
2. Tout d'abord, ceci n'est valable que si N ne s'annule pas ; on le suppose donc.
   N étant dérivable, y l'est aussi et $y' = -\dfrac{N'}{N^2} = \dots = -r\, y + \dfrac{r}{K}$
3. On résout l'équation différentielle de la question précédente, avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{N_0}$
   On trouve $y : t \mapsto \dfrac{(K - N_0)\, e^{-r\,t} + N_0}{K\, N_0}$
   On en déduit que $N : t \mapsto \dfrac{K\, N_0}{(K - N_0)\, e^{-r\,t} + N_0}$
   $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = K$
4. (a) On transforme l'écriture de la question 3 en $N(t) = \dfrac{K}{\left(\dfrac{K}{N_0} - 1\right) e^{-r\,t} + 1}$.
   Par manipulation d'inégalité, on obtient que $0 < N(t) < K$.
   (b) $N' = r\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) N > 0$
5. Par un raisonnement similaire, on montre que $N(t) > K$ et que N est décroissante.