Géométrie

Géométrie du plan

Dans cette rubrique, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 1

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques de la droite d passant par $A(1,2)$ et $B(-5,3)$.

Exercice 2

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques de la droite d passant par $A(1,2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Déterminer une équation cartésienne de la droite d définie par :

$$d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Exercice 4

On note d_1 la droite de représentation paramétrique :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On note d_2 la droite passant par l'origine O et dirigée par $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Etudier l'intersection de d_1 et d_2.

Si les droites sont sécantes, donner les coordonnées de leur point d'intersection et étudier leur orthogonalité.

Exercice 5

Soient $d_1 : 2x - y + 3 = 0$ et $d_2 : 2x + 4y - 2 = 0$.

Etudier l'intersection de d_1 et d_2.

Si les droites sont sécantes, donner les coordonnées de leur point d'intersection et étudier leur orthogonalité.

Exercice 6

On définit les points $A(1,1)$, $B(2,4)$ et $C(3,1)$.

Calculer les cordonnées du projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Exercice 7

Soit Δ la droite d'équation $2x - y + 1 = 0$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de $M(2,1)$ sur Δ et en déduire la distance de M à Δ.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble dont on donne l'équation est un cercle. Si oui, donner son centre et son rayon.

1. $C_1 : x^2 - 2x + y^2 + 2y + 3 = 0$
2. $C_2 : x^2 - 4x + y^2 + y + 2 = 0$

Exercice 9

On définit d la droite d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et C le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4y - 16 = 0$.

1. Justifier que C est bien un cercle et donner ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer l'intersection de d et de C.

Exercice 10

On définit C par son équation :

$$C : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

1. Déterminer la nature de C et préciser ses éléments caractéristiques.
2. On définit $A(-1,0)$. Déterminer l'ensemble des droites tangentes à C et passant par A.

Géométrie dans l'espace

Dans cette rubrique, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Exercice 11

On note P le plan d'équation $x - 2y - 3z - 4 = 0$.
Déterminer une représentation paramétrique de P.

Exercice 12

On note P_1 le plan d'équation $x + y + z + 1 = 0$ et P_2 le plan d'équation $x - y + 3z - 1 = 0$.

1. Justifier que P_1 et P_2 sont sécants.
   On note d leur droite d'intersection.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de d.

Exercice 13

On définit les points $A(0, 3, -1)$, $B(1, 1, 0)$ et $C(1, -1, 2)$.

1. Justifier que les trois points A, B et C définissent un plan.
2. Donner un système d'équations paramétriques du plan (ABC).
3. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 14

Soient $A(1, 2, 3)$, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de d.
2. Déterminer deux plans différents P et P' contenant d et une équation cartésienne de chacun d'eux.
3. En déduire une représentation cartésienne de d.

Exercice 15

On définit les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 4)$ et $C(1, 0, 1)$.

1. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point $D(1, 2, 3)$ sur le plan (ABC).

Exercice 16

Soient $A(-1, 4, 3)$ et P le plan de représentation paramétrique :

$$P : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 2\lambda & + & \mu & + & 3 \\ y & = & \lambda & - & \mu & - & 1 \\ z & = & -\lambda & + & 2\mu & + & 1 \end{array} \right.$$

1. Déterminer une équation cartésienne de P.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur P.

Exercice 17

On considère le point $A(1, 2, 3)$, les plans P_1 et P_2 d'équations respectives $x + y + z = 3$ et $2x - y + z = 2$ ainsi que la droite d de représentation paramétrique :

$$d : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 2\lambda \\ y & = & & & 3\lambda \\ z & = & -1 & + & \lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Trouver le plan P_1' parallèle à P_1 et passant par A.
   Déterminer la distance de A à P_1.
2. On note Δ l'intersection des plans P_1 et P_2.
   Déterminer une représentation paramétrique de Δ.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ, contenue dans P_1 et sécante avec d.

Exercice 18

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On définit $\mathcal{D}_1$ la droite passant par le point $A_1(1, 0, 1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par $A_2(0, 1, 2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et telle que Δ, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient concourantes.

Exercice 19

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit :

$$(d_\lambda) : \left\{ \begin{array}{l} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{array} \right.$$

1. Donner la nature géométrique de (d_λ) en fonction de λ.
2. On définit $\mathcal{P}_\lambda$ le plan passant par $A(1, -1, \lambda)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.
   Etudier la nature de $(d_\lambda) \cap \mathcal{P}_\lambda$ en fonction de λ.