DS n°3 - Correction

Exercice 1

1. On propose :

```
def graphique(X,Y):
    plt.plot(X,Y,'*')
    plt.grid()
    plt.show()
```

2. (a) $\boxed{\text{Pour } x, \text{ la formule de König-Huygens est : } s_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2.}$

$\boxed{\text{Pour } (x,y), \text{ la formule de König-Huygens est : } s_{xy} = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}.}$

$\boxed{\text{Si } s_x \neq 0,\ a = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2} \text{ et } b = \overline{y} - a\,\overline{x}.}$

(b) On propose :

```
def pente(X,Y):
    sx = 0
    sy = 0
    sxcarre = 0
    sxy = 0
    n = len(X)
    for k in range(n):
        sx += X[k]
        sy += Y[k]
        sxcarre += X[k]**2
        sxy += X[k]*Y[k]
    covariance = sxy/n - (sx/n)*(sy/n)
    variance_x = sxcarre/n - (sx/n)**2
    return covariance/variance_x
```

(c) On propose :

```
def ordonnee_origine(X,Y):
    sx = 0
    sy = 0
    n = len(X)
    for k in range(n):
        sx += X[k]
        sy += Y[k]
    return (sy/n) - pente(X,Y)*(sx/n)
```

Exercice 2

1. Méthode 1

(a) Soient $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ fixé. On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$PX = Y \iff \left\{ \begin{array}{ccccccl} 5x & + & y & - & 2z & = & a \\ 2x & & & - & z & = & b \\ x & + & 2y & & & = & c \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccll} 5x & + & y & - & 2z & = & a & \\ & - & 2y & - & z & = & 5b-2a & 5L_2 - 2L_1 \\ & & 9y & + & 2z & = & 5c-a & 5L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccll} 5x & + & y & - & 2z & = & a & \\ & - & 2y & - & z & = & -2a+5b & \\ & & 5y & & & = & 5c-a+10b-4a & L_3 + 2L_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 2a & - & 4b & - & c \\ y & = & -a & + & 2b & + & c \\ z & = & 4a & - & 9b & - & 2c \end{array} \right.$$

Ceci prouve que $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}}$.

(b) On trouve $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$A^n = (P^{-1}DP)^n = \underbrace{(P^{-1}DP) \times (P^{-1}DP) \times \cdots \times (P^{-1}DP)}_{n \text{ fois}} = P^{-1}D^nP$

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & -4 & -2^n \\ -2^n & 2 & 2^n \\ 4 \times 2^n & -9 & -2 \times 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \times 2^n - 8 & 0 & -4 \times 2^n + 4 \\ -4 \times 2^n + 4 & 2^n & 2 \times 2^n - 2 \\ 18 \times 2^n - 18 & 0 & -8 \times 2^n + 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 9 \times 2^n - 8 & 0 & -4 \times 2^n + 4 \\ -4 \times 2^n + 4 & 2^n & 2 \times 2^n - 2 \\ 18 \times 2^n - 18 & 0 & -8 \times 2^n + 9 \end{pmatrix}}$$

(d) D est une matrice diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc $\boxed{D \text{ est inversible.}}$

A est le produit des trois matrices P^{-1}, D et P qui sont toutes les trois inversibles, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$A^{-n} = (A^n)^{-1} = \left(P^{-1}D^nP\right)^{-1} = P^{-1}(D^n)^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}D^{-n}P$

$$A^{-n} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par les mêmes calculs qu'en 2c, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^{-n} = \begin{pmatrix} 9 \times 2^{-n} - 8 & 0 & -4 \times 2^{-n} + 4 \\ -4 \times 2^{-n} + 4 & 2^{-n} & 2 \times 2^{-n} - 2 \\ 18 \times 2^{-n} - 18 & 0 & -8 \times 2^{-n} + 9 \end{pmatrix}}$

2. Méthode 2

(a) $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 18 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -18 & 0 & 9 \end{pmatrix} = -B$

On conjecture donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = (-1)^{n+1}B$ et on prouve cette conjecture par récurrence.

- Initialisation : pour $n = 1$
  $B^1 = B$ et $(-1)^{1+1}B = (-1)^2B = 1 \times B = B$.
  La propriété est donc vraie au rang 1.
- Hérédité
  On suppose qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^n = (-1)^{n+1}B$. On calcule :
  $B^{n+1} = B^n \times B = (-1)^{n+1}B \times B = (-1)^{n+1}B^2 = (-1)^{n+1} \times (-B) = (-1)^{n+2}B$.
  La propriété est donc héréditaire.
- Conclusion
  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = (-1)^{n+1}B.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$A = B + 2I_3$ donc on souhaite calculer A^n par la formule du binôme de Newton.

Or : $B \times (2I_3) = 2BI_3 = 2B$ et $(2I_3)B = 2I_3B = 2B$.

Donc les matrices B et $2I_3$ commutent et la formule du binôme de Newton s'applique.

On calcule donc :

$$\begin{aligned}
A^n &= (B + 2I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k 2^{n-k} I_3^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} B^0 2^n I_3^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k 2^{n-k} I_3^{n-k} \qquad \text{(formule du 1a valable seulement à partir du rang 1)} \\
&= 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^{k+1} B \\
&= 2^n I_3 - \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k \right) B \\
&= 2^n I_3 - \left[\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k \right) - 2^n \right] B \\
&= 2^n I_3 - \left[\left((2-1)^n \right) - 2^n \right] (A - 2I_3) \\
&= (2^n - 1)A + \left(2^n - 2(2^n - 1) \right) I_3 \\
&= (2^n - 1)A + (2 - 2^n) I_3
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3}$

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{ll} & f(x) \text{ existe} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 1+x \neq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$
$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est } D =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}.}$

2. Tout d'abord, l'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in D$. On calcule :
$f(-x) = \ln\left(\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right) = -\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) = -f(x)$
Ceci prouve que $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

3. (a) On représente le signe de $\frac{1+x}{1-x}$ (pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$) dans un tableau :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+x$	$-$	$+$	$+$	
$1-x$	$+$	$+$	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$	$+$	$-$	

(b) Tout d'abord, par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur D.
Soit $x \in D$.
Pour calculer $f'(x)$, il faut distinguer les cas :
<u>1^{er} cas : si $-1 < x < 1$</u>
Dans ce cas, d'après la question précédente, $0 < \frac{1+x}{1-x}$.
Ainsi, $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
Et donc, $f'(x) = \dfrac{\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \dfrac{2}{(1+x)(1-x)}$
<u>$2^{\text{ème}}$ cas : si $x < -1$ ou $1 < x$</u>
Dans ce cas, d'après la question précédente, $\frac{1+x}{1-x} < 0$.
Ainsi, $f(x) = \ln\left(-\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$.
Et donc, $f'(x) = \dfrac{\frac{x-1-(1+x)}{(x-1)^2}}{\frac{1+x}{x-1}} = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2}{(1+x)(1-x)}$
<u>Conclusion</u>
$\boxed{\text{Pour tout } x \in D,\ f'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)}.}$

(c) Sur D, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\frac{1+x}{1-x}$.
Or, le signe de cette expression a déjà été étudié à la question 3a.
On donne donc les variations de f dans un tableau :

4. 1 a deux antécédents par f ; $\frac{e-1}{1+e} \in]-1, 1[$ et $\frac{1+e}{e-1} \in]1, +\infty[$.
Donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

Exercice 4

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a}$ existe $\Leftrightarrow x^2+2ax+a \neq 0$
On résout donc $x^2+2ax+a=0$.
Pour ce polynôme, $\Delta \ = \ (2a)^2-4a \ = \ 4a(a-1)$.
On distingue donc des cas.

   - Si $a=0$
   L'expression du dénominateur se simplifie en x^2 et donc $\boxed{\text{Si } a=0\,,\ D_0=\mathbb{R}^*}$.
   - Si $a=1$
   L'expression du dénominateur se simplifie en $x^2+2x+1=(x+1)^2$ donc $\boxed{\text{Si } a=1\,,\ D_1=\mathbb{R}\backslash\{-1\}}$.
   - Si $a\in]\,0\,,\,1\,[$
   Dans ce cas, $\Delta<0$ donc $\boxed{\text{Si } a\in]\,0\,,\,1\,[\,,\ D_a=\mathbb{R}}$
   - Si $a\in]-\infty\,,\,0\,[\cup]\,1\,,\,+\infty\,[$
   Dans ce cas, $\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions, qui sont :
   $x \ = \ \dfrac{-2a-\sqrt{4a(a-1)}}{2} \ = \ -a-\sqrt{a(a-1)}$ et $x \ = \ -a+\sqrt{a(a-1)}$
   $$\boxed{\text{Si } a\in]-\infty\,,\,0\,[\cup]\,1\,,\,+\infty\,[\,,\ D_a=\mathbb{R}\setminus\left\{-a-\sqrt{a(a-1)}\,,\,-a+\sqrt{a(a-1)}\right\}}$$

2. Soit $a\in\mathbb{R}$. On cherche $x\in D_a$ tel que :
$f_a(x)=0 \ \Leftrightarrow \ x^2=a^2 \ \Leftrightarrow \ x=a$ ou $x=-a$

   - Si $a=0$
   $D_0=\mathbb{R}^*$ donc $\boxed{\text{Si } a=0\text{, alors 0 n'a pas d'antécédent par } f_0}$.
   - Si $a=1$
   $D_1=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ donc $\boxed{\text{Si } a=1\text{, 0 a un seul antécédent par } f_1 \text{ qui est } 1.}$
   - Si $a\in]\,0\,,\,1\,[$
   $D_a=\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{Si } a\in]\,0\,,\,1\,[\text{, alors 0 a deux antécédents par } f_a \text{ qui sont } a \text{ et } -a}$
   - Si $a\in]-\infty\,,\,0\,[\cup]\,1\,,\,+\infty\,[$
   On vérifie si les antécédents potentiels peuvent être des valeurs interdites :
     - $\rightarrow \ -a=-a+\sqrt{a(a-1)} \ \Leftrightarrow \ a=0$ ou $a=1$, qui est exclu
     - $\rightarrow \ -a=-a-\sqrt{a(a-1)} \ \Leftrightarrow \ a=0$ ou $a=1$, qui est exclu
     - $\rightarrow$ Ainsi, dans tous les cas, $-a\in D_a$
     - $\rightarrow \ a=-a+\sqrt{a(a-1)} \ \Leftrightarrow \ 2a=\sqrt{a(a-1)} \ \Leftrightarrow \ a>0$ et $4a^2=a^2-a \ \Leftrightarrow \ a>0$ et $3a^2=-a$
     Or, les solutions de $3a^2=a$ sont 0 et $-\dfrac{1}{3}$. Donc $a=-a+\sqrt{a(a-1)}$ est impossible.
     - $\rightarrow \ a=-a-\sqrt{a(a-1)}$ est donc possible pour $a=-\dfrac{1}{3}$

   Conclusion dans ce cas :
   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } a\in\left]-\infty\,,\,-\dfrac{1}{3}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{3}\,,\,0\right[\cup]\,1\,,\,+\infty\,[\text{, alors 0 a deux antécédents par } f_a \text{ qui sont } a \text{ et } -a.\\ \text{Si } a=-\dfrac{1}{3}\text{, alors 0 a un seul antécédent par } f_a \text{ qui est } -a=\dfrac{1}{3}.\end{array}}$$

3. Pour tout $x\in D_1=\mathbb{R}\backslash\{-1\}\,,\ f_1(x) \ = \ \dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} \ = \ \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} \ = \ \dfrac{x-1}{x+1}$
Soit $y\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$. On cherche $x\in D_1=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ tel que :
$y=f(x) \ \Leftrightarrow \ \dots \ \Leftrightarrow \ x=\dfrac{1+y}{1-y}$ (possible car $y\neq1$) et cette valeur appartient bien à $D_1=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
$$\boxed{\begin{array}{l}f_1 \text{ est bijective de } \mathbb{R}\backslash\{-1\} \text{ dans } \mathbb{R}\backslash\{1\} \text{ et sa réciproque est :}\\ \qquad\qquad \begin{array}{rccc} f_1^{-1} & : & \mathbb{R}\backslash\{1\} & \rightarrow & \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ & & y & \mapsto & \dfrac{1+y}{1-y}\end{array}\end{array}}$$