DM5 (Correction)

Exercice 1

1. On trouve $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

   De plus, on constate que : $\boxed{A^3 = A^2 + 2A}$.

2. On procède par récurrence.
   - Initialisation : pour $n = 1$
     $A^1 = A = 1 \times A + 0 \times A^2$
     La propriété est vrai au rang $n = 1$ en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
   - Hérédité
     On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = a_n A + b_n A^2$ avec a_n et b_n des réels.
     On calcule alors :

     $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (a_n A + b_n A^2) \times A \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= a_n A^2 + b_n A^3 \\ &= a_n A^2 + b_n (A^2 + 2A) \qquad \text{(d'après la remarque de la question 1)} \\ &= 2b_n A + (a_n + b_n) A^2 \end{aligned}$$

     Ceci prouve que la propriété est vraie au rang $n+1$, en posant $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.
   - Conclusion

     $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe des réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } A^n = a_n A + b_n A^2 .}$

3. - Pour la suite (b_n)
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

     $$\begin{aligned} b_{n+2} &= a_{n+1} + b_{n+1} \qquad \text{(d'après la deuxième formule de l'hérédité)} \\ &= 2b_n + b_{n+1} \qquad \text{(d'après la première formule de l'hérédité)} \end{aligned}$$

     Ceci prouve que la suite (b_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 sans second membre.

     → Equation caractéristique
     On résout : $x^2 - x - 2 = 0$
     Les solutions sont -1 et 2.

     → Terme général
     Il existe λ et μ des réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $b_n = \lambda(-1)^n + \mu \times 2^n$.

     → Constantes
     On sait que $b_1 = 0$.
     Par ailleurs, $b_2 = a_1 + b_1 = 1$
     Ainsi, on obtient λ et μ en résolvant :

     $$\begin{cases} \lambda \times (-1)^1 + \mu \times 2^1 = 0 \\ \lambda \times (-1)^2 + \mu \times 2^2 = 1 \end{cases}$$
     $$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + 4\mu = 1 \end{cases}$$
     $$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu = 0 \\ 6\mu = 1 \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases}$$
     $$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = \frac{1}{6} \end{cases}$$

     → Conclusion

     $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ b_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6} \times 2^n .}$

- <u>Pour la suite (a_n)</u>
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

$$\begin{aligned}
a_n &= b_{n+1} - b_n && \text{(d'après la deuxième formule de l'hérédité)}\\
&= \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{6} \times 2^{n+1} - \left(\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6} \times 2^n\right) && \text{(d'après la début de la question)}\\
&= \frac{1}{3}(-1)^n(-1-1) + \frac{1}{6} \times 2^n(2-1)\\
&= \frac{2}{3} \times (-1)^{n+1} + \frac{1}{6} \times 2^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2}{3} \times (-1)^{n+1} + \frac{1}{6} \times 2^n\ .}$$

Exercice 2

1. On transforme :
$$-\frac{1}{r}\frac{du}{dt} = \frac{u}{L} + \frac{1}{R}\frac{du}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad C\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)\frac{du}{dt} + \frac{1}{L}u = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$
Or :
   - $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ donc $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$
   - $\dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{R}\right) \;=\; \dfrac{1}{C}\,\dfrac{R+r}{Rr} \;=\; \dfrac{1}{CR_e} \;=\; 2\,\alpha\,\omega_0$

   Ceci prouve que : $\boxed{\text{l'équation différentielle précédente est équivalente à : } \dfrac{d^2u}{dt^2} + 2\,\alpha\,\omega_0\,\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2\,u = 0}$.

2. - Equation caractéristique
     On commence par résoudre :
     $$x^2 + 2\,\alpha\,\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$$
     $$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2\,\omega_0 x + \omega_0^2 = 0 \qquad \text{(puisque } \alpha = 1\text{)}$$
     $$\Leftrightarrow \quad \left(x+\omega_0\right)^2 = 0$$
     $$\Leftrightarrow \quad x = -\,\omega_0$$
   - Résolution générale
     L'équation différentielle est en fait homogène et l'ensemble de ses solutions est donc :
     $$\left\{ \begin{array}{rcll} y : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \left(K_1\,t + K_2\right)e^{-\,\omega_0\,t} \end{array} \;\middle|\; K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
   - Conditions initiales
     u est une solution de l'équation différentielle donc il existe K_1 et K_2 des réels tels que, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $u(t) = \left(K_1\,t + K_2\right)e^{-\,\omega_0\,t}$.
     De plus, $u(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; K_2 = 0$.
     Par ailleurs, par les théorèmes opératoires, u est dérivable sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $t \in [0,+\infty[$:
     $\dfrac{du}{dt}(t) = K_1 e^{-\,\omega_0\,t} - \omega_0\,K_1\,t e^{-\,\omega_0\,t}$.
     Ainsi, $\dfrac{du}{dt}(0) = \dfrac{E}{r\,C} \;\Leftrightarrow\; K_1 = \dfrac{E}{r\,C}$
   - Conclusion
     $\boxed{\text{Pour tout } t \in [0,+\infty[\,,\; u(t) = \dfrac{E}{r\,C}\,t\,e^{-\,\omega_0\,t}}$