Nom : ....

Interrogation 7 - Mardi 7 janvier 2025

Trigonométrie (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\mathsf{E}) : \cos(x) = \frac{1}{2}$.

Nombres complexes (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathsf{E}) : x^2 + x + 1 = 0$.
On donnera les solutions sous forme exponentielle.

Statistique descriptive (2 points)

Ecrire une fonction Python **moyenne** qui prend en argument une liste de nombres L (supposée non vide) et qui renvoie la moyenne des éléments de L.

Suites réelles usuelles (4 points)

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4} \\ \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1. Pour tout $\in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Nombres réels, applications, fonctions réelles usuelles (3 points)

On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \ln(|x^2 - 1|)$$

où x désigne un nombre réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Démontrer que f est paire.
3. Justifier que f n'est pas injective.

Matrices, systèmes linéaires et géométrie (6 points)

Dans cet exercice, m désigne un paramètre réel quelconque et on se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que $A_m = \begin{pmatrix} -(5+m) & 3 \\ 6 & -(2+m) \end{pmatrix}$ soit inversible.
2. Dans cette question, on se place dans le cas où A_m est inversible. Déterminer A_m^{-1}.
3. Dans cette question, on se place dans les cas où A_m n'est pas inversible.
   (a) Résoudre $(S_m) : \left\{ \begin{array}{cccc} -(5+m)x & + & 3y & = & 0 \\ 6x & - & (2+m)y & = & 0 \end{array} \right.$
   (b) Interpréter géométriquement.

Dérivées, primitives et intégrales (3 points)

On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \cos^3(t)\, dt$.
On admet que I est bien définie.
Calculer I en utilisant le changement de variable $u = \sin(t)$.

Equations différentielles linéaires (3 points)

Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ y' - 2y = 5$ sur $\mathbb{R}$.

Logique, raisonnements et ensembles (5 points)

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = (n+1)\, u_{n+1} - (n+2)\, u_n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \ u_n = -1 + n(n-1)$.