Semaine 13 - Lundi 13 janvier au vendredi 17 janvier

Chap 13 - Equations différentielles linéaires

Introduction

- Définition : équation différentielle
- Exemple de l'exponentielle

I/ Equations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Définition
    - Définitions : EDL d'ordre 1 ($y' + a(t)y = f(t)$ où a et f sont des fonctions), second membre, équation homogène
2. Résolution de l'équation homogène
    - Proposition : ensemble des solutions de (E_0)
    - Cas particulier : si a est constante
3. Recherche d'une solution particulière
    - Principe de superposition
    - Cas particulier : si a et f sont constantes
    - Cas général : méthode de variation de la constante
4. Résolution
5. Exemple

II/ Equations différentielles linéaires d'ordre 2

1. Définition
    - Définitions : EDL d'ordre 2 ($y''+ay'+by = f(t)$ où a, b sont des réels et f est une fonction), second membre, équation homogène, équation caractéristique
2. Résolution de l'équation homogène
3. Recherche d'une solution particulière
    - Principe de superposition
    - Cas particulier : si f est constante
4. Résolution
5. Exemple

Chap 14 - Géométrie

I/ Vecteurs

1. Définition
    - Définitions : vecteur non nul (défini par direction, sens, norme), vecteur directeur, vecteur nul, vecteur $\overrightarrow{AB}$
    - Proposition : si $\overrightarrow{u}$ et O sont fixés, alors $\exists ! M$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$
2. Règles de calcul sur les vecteurs
    - Définitions géométriques : somme de vecteurs, produit par un scalaire
    - Relation de Chasles
3. Familles liées et familles libres
    - Vecteurs colinéaires : définition (même direction), caractérisations par "l'un est un multiple de l'autre" et par l'existence d'une combinaison linéaire
    - Vecteurs coplanaires : définition (même plan), caractérisations par "l'un est une combinaison linéaire des autres" et par l'existence d'une combinaison linéaire
4. Bases et repères
    - Définition : base du plan ou de l'espace
    - Proposition : dans une base, existence et unicité des coordonnées
    - Définition : un repère est la donnée d'une base et d'une origine

II/ Produit scalaire, norme et orthogonalité

1. Définitions géométriques du produit scalaire
    - Définition : projeté orthogonal d'un vecteur sur un autre
    - Définitions du produit scalaire : avec un projeté orthogonal et avec un angle orienté
    - Norme : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}}$
2. Règles de calcul du produit scalaire et de la norme
    - Produit scalaire : commutatif, bilinéaire
    - Norme : homogénéité, inégalité triangulaire, positivité, inégalité de Cauchy-Schwarz
3. Orthogonalité et définition analytique du produit scalaire

- Caractérisation : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$
- Définitions : base orthogonale, base orthonormée (+ repère)
- *Dans une base orthonormée*, définition du produit scalaire par les coordonnées

III/ Déterminant

Dans ce paragraphe, on se place dans le plan muni d'une base orthonormée.

- Définition géométrique : $\mathtt{det}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\theta)$
- Caractérisation : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\mathtt{det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
- Définition du déterminant par les coordonnées et lien avec le déterminant d'une matrice

IV/ Géométrie du plan

Dans ce paragraphe, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Droites
   - Définition : $d(A, \vec{u}) = \{ M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\}$
   - Représentation paramétrique d'une droite
   - Equation cartésienne d'une droite, vecteur normal
   - Définition : pente ou coefficient directeur
2. Projection orthogonale
   - Existence et unicité du projeté orthogonal d'un point sur une droite
3. Cercles
   - Définition : $\mathcal{C}(A, r) = \{ M \in \mathcal{P} \mid AM = r \}$
   - Représentation paramétrique d'un cercle
   - Equation cartésienne d'un cercle

V/ Géométrie dans l'espace

Dans ce paragraphe, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Plans
   - Définition : $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{ M \in \mathcal{E} \mid \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \}$
   - Représentation paramétrique d'un plan
   - Equation cartésienne d'un plan, vecteur normal
2. Droites
   - Représentation paramétrique
   - Systèmes d'équations cartésiennes
3. Projection orthogonale
   - Existence et unicité du projeté orthogonal d'un point sur une droite
   - Existence et unicité du projeté orthogonal d'un point sur un plan
   - Définition : distance d'un point à un plan

Chap 15 - Dénombrement

I/ Cardinal d'un ensemble fini

1. Définition
   - Définitions : ensemble fini, cardinal, cas de l'ensemble vide, notations $\mathtt{card}(E)$ et $\#E$
   - Proposition : deux ensembles finis non vides ont le même cardinal ssi ils sont en bijection
2. Lien avec les opérations sur les ensembles
   - Inclusion
   - Union disjointe, complémentaire, formule du crible
   - Produit cartésien

II/ Dénombrement

On note E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Choix successifs avec répétitions
   - Un p-uplet (ou une p-liste) est un élément de E^p ; il y en a n^p
2. Choix successifs sans répétition
   - Un p-arrangement est un p-uplet sans répétition ; il y en a $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
3. Choix successifs sans répétition de tous les éléments de E
   - Une permutation est un n-arrangement de E ; il y en a $n!$
4. Choix simultanés
   - Une p-combinaison est un sous-ensemble de E à p éléments ; il y en a $\binom{n}{p}$
5. Complément sur les coefficients binomiaux
   - Preuves combinatoires de : symétrie des coefficients binomiaux, formule du triangle de Pascal, formule du binôme de Newton
   - Ensemble des parties de E $\mathcal{P}(E)$: définition et $\mathtt{card}\Big(\mathcal{P}(E)\Big) = 2^n$

Informatique

Tout ce qui a été vu reste au programme.

Questions de cours

1. *Sans preuve*
   Pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :
   - Résolution de l'équation homogène
   - Principe de superposition
   - Résolution de l'équation
2. *Sans preuve*
   Pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2, énoncer la proposition sur les solutions de l'équation homogène.
3. *Avec preuve.*
   Toute droite du plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.
4. *Avec preuve.*
   Existence et unicité du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
5. *Sans preuve.* Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.
   - Définition d'un p-uplet de E ($p \in \mathbb{N}^*$) et nombre de p-uplets de E.
   - Définition d'un p-arrangement de E ($p \in \mathbb{N}^*$) et nombre de p-arrangements de E.
   - Définition d'une permutation de E et nombre de permutations de E.
   - Définition d'une p-combinaison de E ($p \in [\![0, n]\!]$) et nombre de p-combinaisons de E.