Dénombrement

Exercice 1 (Correction un peu rapide)

- Stratégie 1
  On commence par numéroter les personnes (ce qui est possible).
  Pour la première personne : $N-1$ poignées de mains.
  Pour la deuxième : $N-2$ poignées.
  Ainsi de suite.
  Pour la personne n°$N-1$: 1 poignée de main.
  Total : $\sum_{k=1}^{N-1} k = \dfrac{(N-1)N}{2}$.
- Stratégie 2
  Cela revient à compter le nombre de façons de choisir 2 personnes parmi les N.
  Total : $\binom{N}{2} = \dfrac{N!}{2!\,(N-2)!} = \dfrac{N(N-1)}{2}$

Exercice 2 (Grandes lignes)

1. S'il y a un fermoir, c'est qu'on peut définir un ordre sur les pierres ; il y a la plus proche de la partie mobile du fermoir, la suivante, et ainsi de suite.
   On est dans une situation avec ordre et sans répétition.
   Au total : $7!$.
2. S'il n'y a pas de fermoir, il n'y a plus d'ordre. Pour chaque collier sans fermoir, il y en a 7 colliers avec fermoir associés (selon la place où on met le fermoir).
   Au total : $6!$.

Exercice 3

Fait en classe.

Exercice 4

Fait en classe.

Exercice 5 (Résultats)

Même raisonnement que dans l'exercice 4.

1. $5!$
2. $\dfrac{6!}{2!}$
3. $\dfrac{8!}{2!\,4!}$
4. $\dfrac{11!}{5!\,2!\,2!}$

Exercice 6 (Grandes lignes)

Pour aller de O jusqu'à A, il faut faire 3 déplacements vers la droite (notés d) et 5 déplacements vers le haut (noté h).

- Méthode 1
  L'exercice revient à compter les anagrammes de $\mathtt{dddhhhhh}$.
  Il y en a $\dfrac{8!}{3!5!} = \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$.
- Méthode 2
  Parmi les 8 déplacements, il faut choisir les positions des déplacements d ; il y a $\binom{8}{3}$ façon de les placer.
  Les déplacements h n'ont alors plus le choix.

Exercice 7

Fait en classe.

Exercice 8 (Correction détaillée)

1. On applique la formule du crible :

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{card}\Big(A \cup (B \cup C)\Big) \\
&= \mathrm{card}(A) \\
&\quad + \mathrm{card}(B \cup C) \\
&\quad - \mathrm{card}\Big(A \cap (B \cup C)\Big) \\
&= \mathrm{card}(A) \\
&\quad + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \mathrm{card}(B \cap C) \\
&\quad - \mathrm{card}\Big((A \cap B) \cup (A \cap C)\Big) \\
&= \mathrm{card}(A) \\
&\quad + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \mathrm{card}(B \cap C) \\
&\quad - \Big[\mathrm{card}(A \cap B) + \mathrm{card}(A \cap C) - \mathrm{card}\Big((A \cap B) \cap (A \cap C)\Big)\Big] \\
&= \mathrm{card}(A) \\
&\quad + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \mathrm{card}(B \cap C) \\
&\quad - \mathrm{card}(A \cap B) - \mathrm{card}(A \cap C) + \mathrm{card}\Big(A \cap B \cap C\Big)
\end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait.

$$\boxed{\mathrm{card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \Big(\mathrm{card}(A \cap B) + \mathrm{card}(A \cap C) + \mathrm{card}(B \cap C)\Big) + \mathrm{card}(A \cap B \cap C)}$$

2. (a)
   - Pour la boule n°1, on choisit une urne : 3 possibilités.
   - Pour la boule n°2, on choisit une urne : 3 possibilités.
   - ...
   - Pour la boule n°n, on choisit une urne : 3 possibilités.

   Au total, $\boxed{\text{il y a } 3^n \text{ répartitions possibles}}$.

   (b) C'est le même raisonnement que la question précédente, sauf que pour chaque boule il n'y a que 2 possibilités (urnes 2 et 3). Au total, $\boxed{\text{il y a } 2^n \text{ répartitions pour laquelle l'urne 1 est vide}}$.

   (c) On traduit : "au moins une urne est vide" signifie que "l'urne n°1 est vide, ou l'urne n°2 est vide ou l'urne n°3 est vide".
   Ainsi, il s'agit de déterminer le cardinal de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
   Or, d'après la question 1 :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
= \;& \mathrm{card}(A_1) + \mathrm{card}(A_2) + \mathrm{card}(A_3) - \Big(\mathrm{card}(A_1 \cap A_2) + \mathrm{card}(A_1 \cap A_3) + \mathrm{card}(A_2 \cap A_3)\Big) + \mathrm{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}$$

   Or :

   - $\mathrm{card}(A_1) = \mathrm{card}(A_2) = \mathrm{card}(A_3) = 2^n$ (question 2b)
   - $A_1 \cap A_2$ est l'ensemble des répartitions pour lesquelles les urnes n°2 et n°3 sont vides. Donc toute les boules sont dans l'urne 3. Il n'y a qu'une seule façon de créer une telle répartition. Donc $\mathrm{card}(A_1 \cap A_2) = 1$.
     De même pour $\mathrm{card}(A_1 \cap A_3)$ et $\mathrm{card}(A_2 \cap A_3)$
   - $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ est l'ensemble des répartitions pour lesquelles les trois urnes sont vides. Ceci est impossible. Donc $\mathrm{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$

   Finalement :
   $\mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 2^n + 2^n + 2^n - \Big(1 + 1 + 1\Big)$

   C'est-à-dire : $\boxed{\text{il y a } 3\,(\,2^n - 1) \text{ répartitions pour lesquelles au moins une urne est vide}}$.

   (d) On cherche à calculer le cardinale du complémentaire de l'ensemble précédent.
   $\boxed{\text{Il y a } 3^n - 3(2^n - 1) \text{ répartitions pour lesquelles chaque urne contient au moins une boule.}}$

Exercice 9

Fait en classe.

Exercice 10 (Correction complète)

Vu la façon dont la situation est présentée, il n'y a ni ordre ni répétition.

1. $\binom{32}{5} = 201\,376$
2. (a) Pour un brelan :
   - $\rightarrow$ On choisit la hauteur du brelan : 8 possibilités
   - $\rightarrow$ On choisit les cartes qui constitue le brelan : $\binom{4}{3}$ façons de le faire.
   - $\rightarrow$ On choisit les deux hauteurs distinctes restantes : $\binom{7}{2}$ façons de le faire.
   - $\rightarrow$ On choisit la couleur de la carte de plus haute valeur : 4 possibilités
   - $\rightarrow$ On choisit la couleur de la carte de plus faible valeur : 4 possibilités

   Au total : $8 \times \binom{4}{3} \times \binom{7}{2} \times 4 \times 4 = 10\,752$

   (b) Pour un carré :
   - $\rightarrow$ On choisit la hauteur du carré : 8 possibilités
   - $\rightarrow$ On choisit la carte restante : 28 possibilités

   Au total : 224 possibilités.

   (c) Pour une double paire :
   - $\rightarrow$ On choisit les hauteurs des deux paires : $\binom{8}{2}$ façons de le faire
   - $\rightarrow$ On choisit les cartes qui vont constituer la paire de hauteur la plus grande : $\binom{4}{2} = 6$ façons de le faire
   - $\rightarrow$ On choisit les cartes qui vont constituer la paire de hauteur la plus faible : $\binom{4}{2} = 6$ façons de le faire
   - $\rightarrow$ On choisit la dernière carte : 24 possibilités

   Au total : $\binom{8}{2} \times 6 \times 6 \times 24 = 24\,192$ possibilités.

   (d) Pour une paire et un brelan :
   - $\rightarrow$ On choisit la hauteur de la paire : 8 possibilités
   - $\rightarrow$ On choisit les deux cartes de la paire : $\binom{4}{2} = 6$ façons de le faire
   - $\rightarrow$ On choisit la hauteur du brelan : 7 possibilités
   - $\rightarrow$ On choisit les cartes du brelan : $\binom{4}{3} = 4$ façons de le faire

   Au total : $8 \times 6 \times 7 \times 4 = 1\,344$ possibilités

   (e) Pour une quinte flush
   - $\rightarrow$ On choisit la couleur : 4 possibilités
   - $\rightarrow$ Pour chaque couleur, il y a 4 possibilités : $7, 8, 9, 10, \mathsf{V}$; $8, 9, 10, \mathsf{V}, \mathsf{D}$; $9, 10, \mathsf{V}, \mathsf{D}, \mathsf{R}$; $10, \mathsf{V}, \mathsf{D}, \mathsf{R}, \mathsf{As}$.

   Au total : $4 \times 4 = 16$ possibilités

Exercice 11 (Correction un peu rapide)

1. Si les paires de chaussettes sont toutes différentes, on peut les numéroter.
   - $\rightarrow$ On choisit le tiroir pour la 1ère paire : n choix.
   - $\rightarrow$ On choisit le tiroir pour la 2ème paire : n choix.
   - $\rightarrow$ ...
   - $\rightarrow$ On choisit le tiroir pour la $r^{\text{ème}}$ paire : n choix

   Au total : n^r possibilités.
2. On choisit de coder la répartition des chaussettes de la façon suivante :
   - $\rightarrow$ On utilise r fois le caractère "c" (pour symboliser une paire de chaussettes)
   - $\rightarrow$ On utilise $n-1$ fois le caractère "—" (pour symboliser une changement de tiroir)

   La question revient à compter les anagrammes de : $\underbrace{c\dots c}_{r \text{ fois}}\ \underbrace{|\dots|}_{n-1 \text{ fois}}$ (qui est un "mot" à $r+n-1$ lettres.

   Il y en a au total : $\dfrac{(r+n-1)\,!}{r\,!\,(n-1)\,!} = \binom{r+n-1}{n-1} = \binom{r+n-1}{r}$.
3. Si $n > r$: c'est impossible.
   Si $n \leqslant r$: on sait qu'il faut mettre une paire par tiroir ; n paire sont donc placées.
   Il reste ensuite à placer $r-n$ paires identiques dans n tiroirs, et le raisonnement est le même que dans la question 2.
   Au total : $\binom{r-1}{n-1}$.

Exercice 12 (Correction complète)

1. Pour construire une application de E dans F :
   - $\rightarrow$ On choisit l'image pour 1 : m possibilités
   - $\rightarrow$ On choisit l'image pour 2 : m possibilités
   - $\rightarrow$ ...
   - $\rightarrow$ On choisit l'image pour n : m possibilités

   Au total : m^n possibilités.
   Cela revient à compter les n-uplets de F.
2. Si $m < n$: c'est impossible.
   Si $m \geqslant n$: pour construire une application injective de E dans F :
   - $\rightarrow$ On choisit l'image de 1 : m possibilités
   - $\rightarrow$ On choisit l'image de 2 : $m-1$ possibilités
   - $\rightarrow$ ...
   - $\rightarrow$ On choisit l'image de n : $m-(n-1) = m-n+1$ possibilités

   Au total : $m \times (m-1) \times \cdots \times (m-n+1) = \dfrac{m\,!}{(m-n)\,!}$ possibilités.
   Cela revient à compter les n-arrangements de F.
3. Si $m \neq n$: c'est impossible.
   Si $m = n$, pour construire une bijection de E dans F :
   - $\rightarrow$ On choisit l'image de 1 : n possibilités
   - $\rightarrow$ On choisit l'image de 2 : $n-1$ possibilités
   - $\rightarrow$ ...
   - $\rightarrow$ On choisit l'image de $n-1$: 2 possibilités
   - $\rightarrow$ On choisit l'image de n : 1 possibilités

   Au total : $n\,!$ possibilités.
   Cela revient à compter les permutations de F.
4. Si $m < n$: c'est impossible.
   Si $m \geqslant n$: pour construire une application strictement croissante de E dans F :
   - $\rightarrow$ On choisit n éléments deux à deux distincts de F pour être les images des éléments de E : il y a $\binom{m}{n}$ façons de le faire.
   - $\rightarrow$ On n'a ensuite plus le choix ; le plus petite sera l'image de 1, et ainsi de suite.

   Au total : $\binom{m}{n}$.
   Cela revient à compter les n-combinaisons de F.